

Volume d'une boule en dimension n

1. Volumes
2. Surfaces
3. Répartition des points
4. Coquilles
5. Un peu de physique

1. Volumes

Nous nous intéressons ici à quelques propriétés des boules en dimension n : volume, surface, structure du volume. Cherchons tout d'abord le volume.

Considérons les premières **demi-boules** :

$$n = 1 \text{ (segment)} : V_1 = R,$$

$$n = 2 \text{ (cercle)} : V_2 = \frac{1}{2} \pi R^2,$$

$$n = 3 \text{ (sphère)} : V_3 = \frac{2}{3} \pi R^3.$$

Nous pouvons nous dire qu'il existe une suite a_n telle que $V_n = a_n R^n$, nous cherchons alors une relation de récurrence entre les a_n en utilisant le calcul intégral. Prenons les coordonnées $x_i, i = 1..n$ et écrivons l'intégrale de volume

$$V_n(R) = \int_{-R}^R \dots \int_{-R_{n-1}}^{R_{n-1}} \int_{-R_n}^{R_n} dx_n dx_{n-1} \dots dx_1$$

où l'intégrale est multiple, les bornes changeant bien sûr suivant les x_i . Au rang suivant on a

$$V_{n+1} = \int_{-R}^R \dots \int_{-R_n}^{R_n} \int_{-R_{n+1}}^{R_{n+1}} dx_{n+1} dx_n \dots dx_2 dx_1$$

et d'une manière générale on a

$$R_i = \sqrt{R^2 - x_1^2 - x_2^2 - \dots - x_{i-1}^2}.$$

Si on pose alors $R^2 - x_1^2 = K^2$ tous ces termes deviennent

$$R_i = \sqrt{K^2 - x_2^2 - \dots - x_{i-1}^2}$$

ce qui fait que l'intégrale

$$\int_{-R_2}^{R_2} \dots \int_{-R_{n+1}}^{R_{n+1}} dx_{n+1} dx_n \dots dx_2$$

vaut en fait le volume $V_n(K)$. Nous avons donc la relation

$$V_{n+1}(R) = \int_{-R}^R V_n(\sqrt{R^2 - x_1^2}) dx_1.$$

Faisons intervenir notre hypothèse de récurrence, à savoir que $V_n(R) = a_n R^n$, nous avons alors

$$V_{n+1}(R) = \int_{-R}^R a_n (\sqrt{R^2 - x_1^2})^n dx_1 = a_n \int_{-R}^R (\sqrt{R^2 - x_1^2})^n dx_1;$$

il nous reste à utiliser la méthode vue dans les intégrales de Wallis en posant $x_1 = R \cos \theta$ ce qui nous donne $V_{n+1}(R) = a_n \int_{\pi}^0 R^n \sin^n \theta (-R \sin \theta) d\theta = a_n R^{n+1} \int_0^{\pi} \sin^{n+1} \theta d\theta$. On trouve donc le double de l'intégrale de Wallis I_{n+1} du fait de la symétrie du sinus et $a_{n+1} = a_n \int_0^{\pi} \sin^{n+1} \theta d\theta = a_n 2I_{n+1}$, soit

$$a_n = 2a_{n-1}I_n = 2^2 a_{n-2}I_{n-1}I_n = 2^{n-2} a_2 I_3 I_4 \dots I_n = 2^{n-1} a_1 I_2 I_3 I_4 \dots I_n.$$

Comme I_n prend deux formes différentes suivant que n est pair ou impair regardons ces deux cas.

Heureusement nous avons trouvé dans le livre que $I_{2p}I_{2p+1} = \frac{1}{2p+1} \frac{\pi}{2}$, soit $I_{2p-1}I_{2p} = \frac{1}{2p} \frac{\pi}{2}$; il nous reste à regrouper les intégrales deux à deux en faisant attention à la parité.

n pair :

$$a_{2p} = 2^{2p-2} a_2 (I_3 I_4) \dots (I_{2p-1} I_{2p}) = 2^{2p-2} \frac{\pi}{2} \cdot \left(\frac{1}{4} \frac{\pi}{2}\right) \dots \left(\frac{1}{2p-2} \frac{\pi}{2}\right) \left(\frac{1}{2p} \frac{\pi}{2}\right) = \frac{2^{2p-1}}{2^p} \frac{\pi^p}{2.4.6 \dots 2p} = \frac{2^{2p-1}}{2^{2p}} \frac{\pi^p}{p!}$$

d'où nous tirons

$$v_n = 2V_{2p} = \frac{\pi^p}{p!} R^{2p}$$

(v_n est le volume de la boule complète).

n impair :

$$\begin{aligned} a_{2p-1} &= a_1 (I_2 I_3) \dots (I_{2p-2} I_{2p-1}) = 2^{2p-2} 1 \cdot \left(\frac{1}{3} \frac{\pi}{2}\right) \dots \left(\frac{1}{2p-3} \frac{\pi}{2}\right) \left(\frac{1}{2p-1} \frac{\pi}{2}\right) = \frac{2^{2p-2} \pi^{p-1}}{2^{p-1} (3.5 \dots (2p-1))} \\ &= \frac{2^{p-1} \pi^{p-1} (2.4.6 \dots (2p-2))}{(2.3.4.5 \dots (2p-2)(2p-1))} = \frac{2^{2p-2} (p-1)! \pi^{p-1}}{(2p-1)!} \end{aligned}$$

et finalement

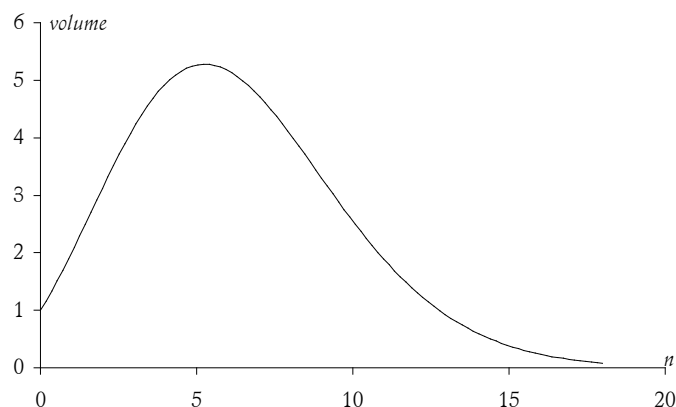
$$v_n = 2V_{2p-1} = \frac{2^{2p-1} (p-1)! \pi^{p-1}}{(2p-1)!} R^{2p-1}.$$

Vous pouvez vérifier avec $n = 3$, ce qui donne $p = 2$ et le résultat bien connu. On peut exprimer le résultat en général avec la fonction *gamma* sous la forme

$$v_n(R) = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)} R^n$$

après s'être rappelé que

$$\Gamma(n) = (n-1)! \text{ et } \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt.$$



Le maximum pour $R = 1$ est atteint pour $n = 5,2556\dots$ (faire le calcul en dérivant par rapport à n); quand n devient grand le volume devient nul (il semble un peu délicat quand même de considérer qu'une boule de rayon 1 en dimension supérieure a un volume qui devient nul ou quasiment quand le nombre de dimensions augmente...)

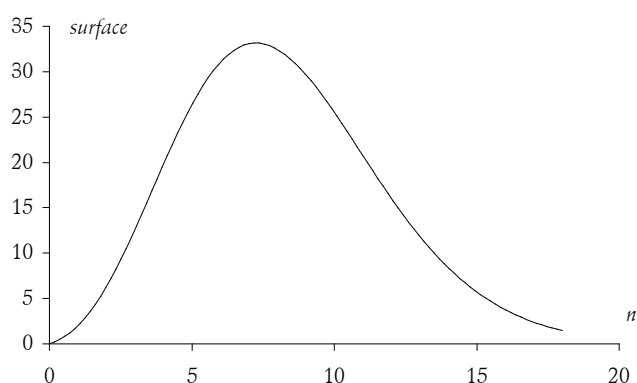
2. Surfaces

Pour la surface, une fois le calcul du volume fait c'est plus facile : notre volume peut être considéré comme la somme d'une infinité de petites couches hypersphériques incluses les unes dans les autres chacune ayant un volume $s_n dr$; nous avons donc

$$v_n = \int_0^R s_n(r) dr$$

d'où en dérivant :

$$s_n(R) = \frac{dv_n(R)}{dR} = \frac{n\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)} R^{n-1}.$$

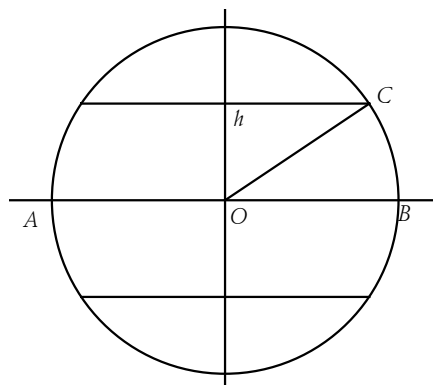


Le maximum est alors obtenu pour $n = 7,25695\dots$

Pour la démonstration on peut d'ailleurs partir de la surface pour trouver le volume (voir Eric Weisstein, <http://mathworld.wolfram.com/Hypersphere.html>).

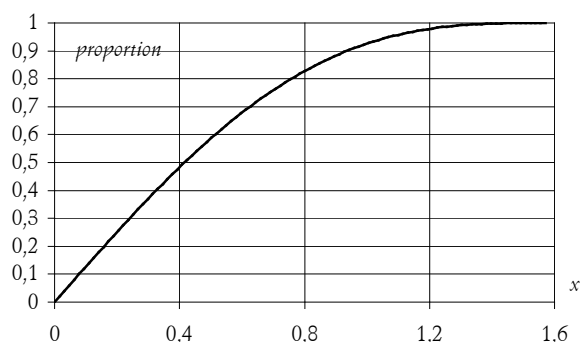
3. Répartition des points

Une autre question intéressante est de regarder comment se répartissent les points à l'intérieur de la boule ; prenons l'exemple du cercle : quelle est la proportion de points situés dans une bande de largeur $2h$ autour du diamètre ?



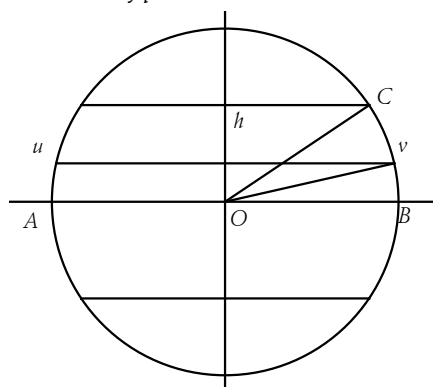
Il nous faut déterminer la proportion de points à l'intérieur de la bande par rapport au total des points du cercle ? Prenons un cercle de rayon 1, il faut calculer l'aire de la bande et la rapporter à l'aire totale : cette aire comprend quatre fois la part de camembert BOC d'aire $\frac{1}{2}\theta$ et quatre triangles d'aires

$\frac{1}{2} \cos \theta \sin \theta = \frac{1}{4} \sin 2\theta$. On a donc l'aire totale de la bande : $A(\theta) = 2\theta + \sin 2\theta$ et notre proportion est $f(\theta) = \frac{1}{\pi} A(\theta)$.



On voit bien ce qui se passe : à mi hauteur la bande contient plus de 80 % des points à l'intérieur du cercle...

En dimension supérieure le raisonnement est tout à fait semblable mais en utilisant le calcul intégral : nous devons sommer tous les segments (uv) entre $-h$ et h ; en dimension 3 nous sommerons des disques et dans l'hyverspace nous sommerons des hypersurfaces :



en dimension 2 : $uv = 2\sqrt{1-x^2}$ et on a pour h entre 0 et 1 :

$$f_2(h) = \frac{2}{\pi} \int_0^h 2\sqrt{1-x^2} dx,$$

en dimension 3 : l'aire du disque est $\pi \left(\frac{1}{2}uv\right)^2 = \pi(1-x^2)$ et on a

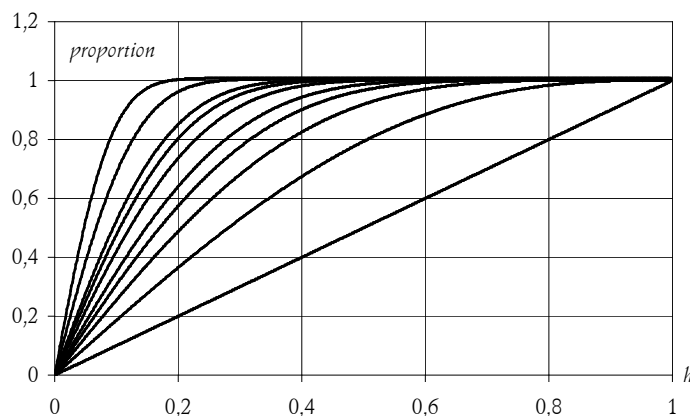
$$f_3(h) = \frac{3}{2\pi} \int_0^h \pi(1-x^2) dx,$$

en dimension n : le volume de l'hyversphère de dimension $n - 1$ et de rayon $\frac{1}{2}uv = \sqrt{1-x^2}$ est

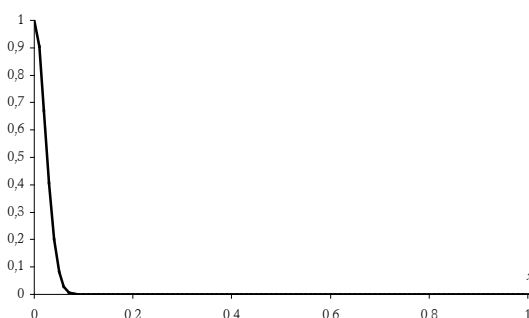
$$v_{n-1}(x) = \frac{\pi^{(n-1)/2}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2} + 1\right)} (1-x^2)^{\frac{n-1}{2}}$$

d'où

$$f_n(h) = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}{\pi^{n/2}} 2 \int_0^h \frac{\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)} (1-x^2)^{\frac{n-1}{2}} dx = \frac{2\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\sqrt{\pi}} \int_0^h (1-x^2)^{\frac{n-1}{2}} dx.$$



On peut transformer l'intégrale, mais ce n'est pas très utile ; numériquement voici ce qu'on obtient avec les valeurs 1, 5, 10, 15, 20, 30, 40, 50, 100 et 200 pour n ($n = 1$ est la droite à droite de la figure, $n = 200$ est la première courbe à gauche ; par exemple pour $n = 200$, à 10 % de la hauteur on a 80 % des points dans la bande). Ce résultat est dû au comportement de la fonction $(1-x^2)^n$ qui a tendance à se coucher de plus en plus sur l'axe horizontal ; figure suivante : $(1-x^2)^{1000}$.



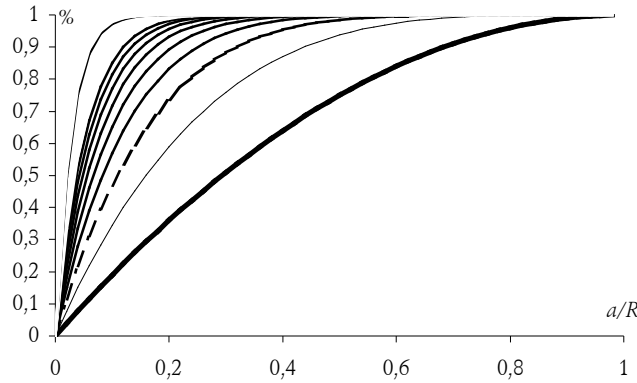
Conclusion de ceci : la plupart des points de l'hypersphère vont être dans une « hyperbande » centrée autour de l'équateur pour n suffisamment grand.

4. Coquilles

On peut refaire le même genre d'étude sur des coquilles hypersphériques : nous prenons deux hypersphères de même centre O , de rayons respectifs R et $R - a$; quelle est en fonction de a et de n la proportion de points dans l'hypercoquille d'épaisseur a ? La réponse est immédiate :

$$\frac{v_n(R) - v_n(R-a)}{v_n(R)} = \frac{R^n - (R-a)^n}{R^n} = 1 - \left(1 - \frac{a}{R}\right)^n$$

qui tend évidemment vers 1 lorsque n tend vers l'infini comme on peut le voir sur la figure suivante (n varie de 2, courbe de droite, à 42, courbe de gauche) : l'apparition des points dans l'hypercoquille est nettement plus rapide que dans le cas précédent.



Peut-on combiner les deux approches en regardant la proportion de points situés à l'intersection des deux ensembles précédents : hyperbande et hypercoquille ? Si on raisonne par exemple dans l'espace usuel il faut intersecter une tranche de sphère et une coquille, ce qui donne grosso-modo un tore de grand rayon R et de petit rayon $a/2$; son volume est alors $\pi \left(\frac{a}{2}\right)^2 \cdot 2\pi R = \frac{1}{2} \pi^2 a^2 R$; rapporté à la sphère on a la proportion $\frac{3}{8} \pi \left(\frac{a}{R}\right)^2$. Dans le cas n on aura un hypertore de volume $v_{n-1}(a/2) \cdot 2\pi R$, ce qui rapporté au

volume de l'hypersphère donne $\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}+1\right)\sqrt{\pi}} \left(\frac{a}{2R}\right)^{n-1}$ qui tend vers 0 à l'infini. Conclusion de tout ça :

les points vont rester sur l'hypercoquille en grande majorité, avec néanmoins un léger tassement sur l'équateur.

5. Un peu de physique

Interprétons physiquement ces considérations : en physique statistique on utilise fréquemment l'espace des phases comprenant comme dimensions les six coordonnées de position et de vitesse de chaque particule ; lorsque celles-ci sont en très grand nombre l'espace des phases a énormément de dimensions. Supposons que nous mesurons la vitesse de chacune des n particules : la moyenne V de ces vitesses donnera une mesure macroscopique comme la température ou la pression (liées à la vitesse) ; reportons cette mesure sur chacun des axes d'un espace à n dimensions : les points considérés seront approximativement sur une coquille de rayon V et d'épaisseur $\frac{V}{\sqrt{n}}$ (voir ch. 13) ; on peut également considérer que les vitesses vont se répartir dans une sphère de rayon inférieur ou égal à la plus grande mesure obtenue V_{\max} , mais comme les points se retrouveront quasiment à la surface, la plupart des vitesses seront environ V_{\max} qui sera en fait la vitesse moyenne : nous retrouvons-là l'hypothèse ergodique de Boltzmann et Maxwell.

Pour plus de choses, voir par exemple les ouvrages suivants (ordre de lecture conseillé) :

Walter Greiner, Ludwig Neise, Horst Stöcker, *Thermodynamique et Mécanique statistique*, Springer Verlag, 1999.

Ilya Prigogine, Dilip Kondepudi, *Thermodynamique*, Odile Jacob, 1999.

Michel Lagües, Annick Lesne, *Invariances d'échelle*, Belin, 2003.

La Sphère, Numéro spécial Pour La Science, Novembre 2003.

Marcel Berger, *Géométrie*, Tomes 1 et 2, Nathan, 1990.