Spirale logarithmique

Si on construit une succession de triangles semblables par similitude d'un triangle initial on obtient une courbe appelée *spirale logarithmique*. Nous allons donc nous poser quelques questions autour de cet objet qui fascina tout d'abord Descartes puis plus particulièrement Johann Bernoulli qui en fit même graver une sur sa tombe accompagée des mots « Eadem mutata resurgo », citation que vous pouvez facilement traduire.

Choisissons donc une similitude directe dans le plan complexe, de centre O : $f : z \rightarrow az$ qui n'est jamais que la traduction complexe des suites géométriques. On peut changer le centre évidemment, mais ça ne change rien au problème, la situation sera alors déplacée au point fixe de la similitude et les résultats seront identiques. On peut également compliquer en prenant des similitudes indirectes, mais on risque de perdre la rotation autour de O dans le cas de la symétrie glissée.

On itère donc la similitude à partir d'un point M_0 pour construire une suite de points M_n tels que $z_{n+1} = az_n$, soit $z_n = a^n z_0$. Sur la fig. 1 nous avons $a = 0,99e^{i0,0055}$, soit un rapport de similitude de 0,99 et un angle de rotation de 0,0055. On remarque immédiatement que les arguments des affixes z_n des points M_n forment une suite arithmétique alors que leurs modules forment une suite géométrique.

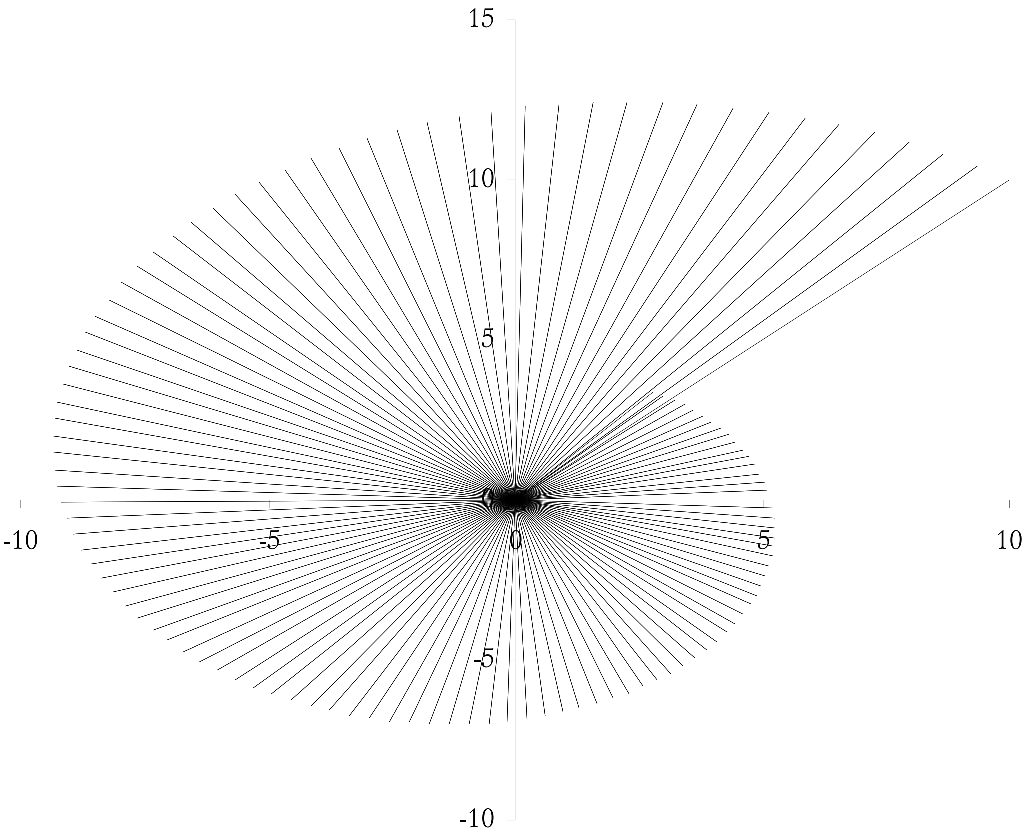
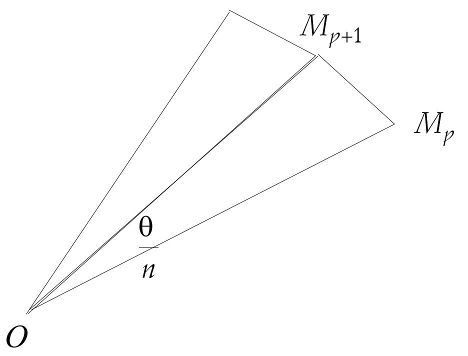


fig- 1 : spirale définie par itération de similitudes

1.Equation polaire

Prenons par exemple un morceau de spirale commençant au point A d'affixe 1 et finissant à un point B d'affixe $a = ke^{i\theta}$; les deux paramètres k et θ caractérisent entièrement la spirale par la similitude $z' = az$. Divisons l'angle $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ en n parties identiques, d'angle $\frac{\theta}{n}$; pour arriver à B avec $OB=k$, il faut effectuer n similitudes de rapport $k^{\frac{1}{n}}$ et d'angle $\frac{\theta}{n}$ correspondant à autant de triangles M_pOM_{p+1} dont les côtés ont pour longueurs $k^{\frac{p}{n}}$ et $k^{\frac{p+1}{n}}$. Le côté M_pM_{p+1} sera alors porteur de la tangente à la spirale au point M_p ; nous allons donc chercher la direction de ce vecteur, puis en faisant tendre n vers l'infini obtenir une relation importante caractérisant la spirale.



Le vecteur en question a pour affixe $z_{p+1} - z_p = k^{\frac{p+1}{n}} e^{i\frac{(p+1)\theta}{n}} - k^{\frac{p}{n}} e^{i\frac{p\theta}{n}} = k^{\frac{p}{n}} e^{i\frac{p\theta}{n}} \left(k^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\theta}{n}} - 1 \right)$; sa direction par rapport à $\overrightarrow{OM_p}$ est donnée par $\arg\left(\frac{z_{p+1} - z_p}{z_p}\right) = \arg\left(k^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\theta}{n}} - 1\right) = \alpha_n$ dont nous allons chercher la cotangente. On a

$$\cot\alpha_n = \frac{k^{\frac{1}{n}}\cos\frac{\theta}{n} - 1}{k^{\frac{1}{n}}\sin\frac{\theta}{n}} = \frac{k^{\frac{1}{n}}\left(1 - 2\sin^2\frac{\theta}{2n}\right) - 1}{k^{\frac{1}{n}} 2\cos\frac{\theta}{2n}\sin\frac{\theta}{2n}} = \frac{k^{\frac{1}{n}} - 1}{k^{\frac{1}{n}}\sin\frac{\theta}{n}} - \frac{\sin\frac{\theta}{2n}}{\cos\frac{\theta}{2n}} = \left(1 - k^{-\frac{1}{n}}\right) \cdot \frac{1}{\sin\frac{\theta}{n}} - \tan\frac{\theta}{2n} .$$

Le premier membre est indéterminé, mais on trouve les limites avec un D.L. ou en utilisant les limites suivantes en 0 : $\frac{\sin x}{x} \to 1$ et $\frac{e^x - 1}{x} \to 1$; le deuxième membre tend vers 0 et devient nul.

$$\frac{1 - k^{-\frac{1}{n}}}{\sin\frac{\theta}{n}} = \frac{1}{n}\ln k \, \frac{e^{-\frac{1}{n}\ln k} - 1}{-\frac{1}{n}\ln k} \cdot \frac{n}{\theta} \cdot \frac{\frac{\theta}{n}}{\sin\frac{\theta}{n}} \to \frac{\ln k}{\theta} = b \;;$$

donc $\cot\alpha_n$ tend vers une valeur fixe b, ce qui signifie que α_n tend vers un angle fixe α égal à $\cot^{-1} b = \cot^{-1}\frac{\ln k}{\theta}$.

Passons en coordonnées polaires et cherchons l'équation polaire de la spirale : nous laissons au lecteur la joie de démontrer que la tangente à une courbe $r = f(t)$ est telle que $\frac{f'(t)}{f(t)} = \cot\lambda$ où λ est l'angle entre le rayon vecteur et la tangente… ; pour notre spirale le résultat est donc que $f'(t) = bf(t)$, simple équation différentielle du premier ordre qui nous donne $f(t)=Ce^{bt}$ ou plutôt $r=f(t)=ae^{bt}$ avec les notations habituelles. Dans notre cas où $f(0)=1$ (point A) nous avons $a=1$.

En coordonnées paramétriques la courbe est alors $\begin{cases} x = ae^{bt}\cos t \\ y = ae^{bt}\sin t \end{cases}$ ou encore avec les complexes : $z(t)=ae^{bt}e^{it}=ae^{(b+i)t}$. Comme $b=\cot\alpha$ on a $z(t)=ae^{\frac{t}{\sin\alpha}e^{i\alpha}}$ et $\frac{dz}{dt}=\frac{a}{\sin\alpha}e^{i\alpha}z$ et on retrouve bien nos similitudes ; ces relations permettent d'obtenir la plupart des caractéristiques de la spirale comme présentées dans

http://www.mathcurve.com/courbes2d/logarithmic/logarithmic.shtml

par exemple.

2. Calcul de la longueur de la spirale

Toujours avec les mêmes paramètres, ici encore avec $b=\frac{\ln k}{\theta}$ nous cherchons la longueur de spirale comprise entre A et B : on peut évidemment repartir sur les suites géométriques en calculant la somme des longueurs M_pM_{p+1}, ce qui aboutit au même genre de calculs que précédemment, mais on peut également utiliser les formules : pour une courbe en paramétriques la longueur de courbe est donnée par $l=\int_u^v \sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}\,dt$, ce qui donne en polaires $\int_u^v \sqrt{f'(t)^2+f(t)^2}\,dt$; nous calculons donc ici

$$\int_0^\theta a\sqrt{b^2e^{2bt}+e^{2bt}}\,dt=a\sqrt{1+b^2}\int_0^\theta e^{bt}\,dt=\left(\frac{e^{b\theta}-1}{b}\right)a\sqrt{1+b^2}\;.$$

Remarquons qu'avec $k=1$ et $\theta=2\pi$ la spirale est un cercle de rayon a auquel cas $b=0$, $\alpha=\frac{\pi}{2}$ et $\frac{e^{b\theta}-1}{b}=\theta\frac{e^{b\theta}-1}{\theta b}\to\theta=2\pi$ lorsque b tend vers 0 (ouf…).

3. Aire de la spirale

Cherchons l'aire de notre spirale préférée pour t compris entre 0 et θ : là encore on peut réutiliser les triangles puisqu'on connaît tous les angles de chaque triangle ainsi que les côtés. L'aire de M_pOM_{p+1} sera

$$\frac{1}{2}\sin\alpha\sqrt{f'(t)^2+f(t)^2}.f(t)=\frac{1}{2}a^2\sin\alpha\sqrt{1+b^2}\,e^{2bt},$$

il reste à intégrer, soit

$$A(\theta)=\int_0^\theta \frac{1}{2}a^2\sin\alpha\sqrt{1+b^2}\,e^{2bt}\,dt=\frac{1}{2}a^2\sin\alpha\sqrt{1+b^2}\left(\frac{e^{2b\theta}-1}{2b}\right);$$

comme dans le cas précédent si $k=1$ et $\theta=2\pi$ on a un cercle de rayon a et on retrouve bien l'aire du cercle πa^2.

4. Une application

Un potentiel en $\frac{1}{r^2}$: Johann Bernoulli pour montrer les possibilités du « nouveau calcul » change la loi de Newton en $\frac{1}{r^2}$ pour une force en $\frac{1}{r^3}$ et résout le problème de l'attraction des corps pour une telle loi.

Reprenons la technique déjà vue pour résoudre Newton à l'aide du produit vectoriel et du produit scalaire : nous avons dit que la trajectoire se situait dans un plan que nous assimilons au plan complexe en prenant un repère tel que $r = OM$ et $\theta = (\vec{i}, \overrightarrow{OM})$; l'affixe de M est alors $z(t) = re^{i\theta}$.

Dérivons z deux fois : $\frac{dz}{dt} = \frac{dr}{dt}e^{i\theta} + ir\frac{d\theta}{dt}e^{i\theta}$ puis

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \left\{\left[\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right] + i\left[2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} + r\frac{d^2\theta}{dt^2}\right]\right\}e^{i\theta}.$$

qui doit être dans la même direction que z ; il faut donc que $2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} + r\frac{d^2\theta}{dt^2} = 0$; si on multiplie cette égalité par r, on fait apparaître la dérivée de $r^2\frac{d\theta}{dt}$ d'où (1) $\frac{d\theta}{dt} = \frac{c}{r^2}$, c constante. En fait nous avons réutilisé la même technique que dans le livre mais en passant par les complexes.

Avec notre force centrale en $\frac{1}{r^3}$ nous obtenons donc $\frac{d^2r}{dt^2} - \left(r\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{k}{r^3}$, k=constante, soit en introduisant (1) $\frac{d^2r}{dt^2} - \frac{1}{r^2} = \frac{k}{r^3}$; nous procédons comme dans le livre en posant $r = \frac{1}{y}$, soit $\frac{dr}{dt} = -c\frac{dy}{d\theta}$ et $\frac{d^2r}{dt^2} = -c^2y^2\frac{d^2y}{dt^2}$ et $-c^2y^2\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{1}{y}c^2y^4 = ky^3 \Leftrightarrow \frac{d^2y}{dt^2} + \left(\frac{c^2+k}{c^2}\right)y = 0$.

Il est quand même amusant de retrouver l'équation de l'oscillateur harmonique dans cette situation ! Le plus gros du travail est maintenant fait ; supposons que $\frac{c^2+k}{c^2} = -\lambda^2$ (négatif), nous obtenons $y = Ae^{\lambda\theta} + Be^{-\lambda\theta}$, soit $r = \frac{1}{Ae^{\lambda\theta} + Be^{-\lambda\theta}}$ d'où le type de courbes suivantes :

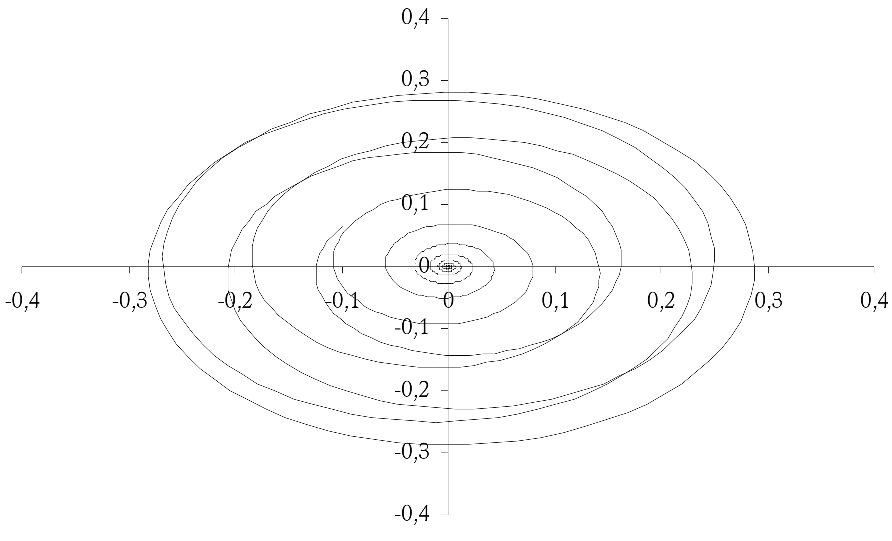


fig- 2 : spirale

Si A ou B est nul on retrouve nos spirales logarithmiques simples.

Maintenant si $\frac{c^2+k}{c^2} = \lambda^2$ (positif), on a $y = Ae^{i\lambda\theta} + Be^{-i\lambda\theta}$, soit en réels $y = m\cos(\lambda\theta + \varphi)$ d'où $r = \frac{1}{m\cos(\lambda\theta + \varphi)}$ dont voici un exemple :

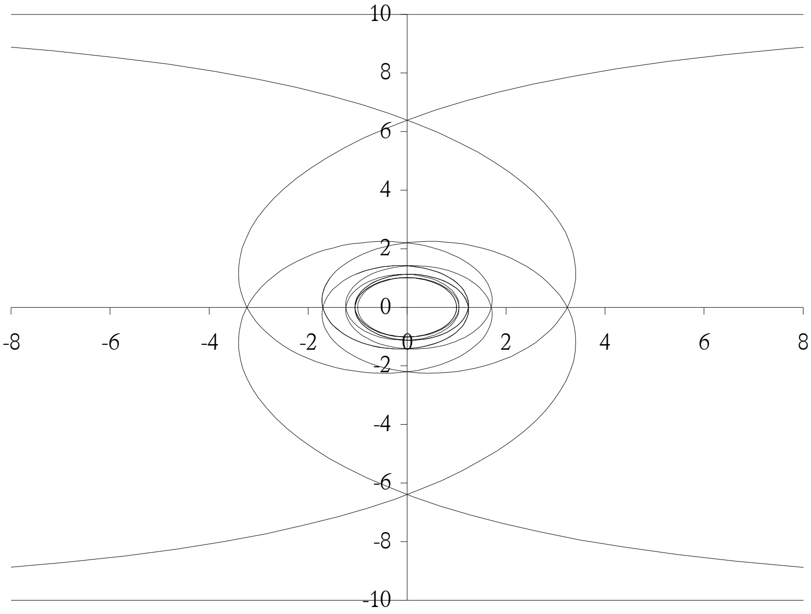


fig- 3 : spirale hyperbolique

On peut se dire que ce type de calcul ne présente qu'un intérêt limité en tout cas en termes physiques, mais on peut soulever quelques questions de fond à ce propos : dans la loi de Newton la gravitation impose la force en $1/r^2$ obtenue de manière empirique (on peut parler de potentiel en $1/r$, mais ça ne fait que déplacer le problème) ; de la même manière en électromagnétisme on obtient également une force en $1/r^2$ pour des particules chargées, force dont le vecteur est le photon ; l'explication couramment admise est que une particule émet des photons dans toutes les directions et qu'à une distance r le flux de photons reçus est inversement proportionnel à la dispersion dans l'espace de ces photons.

Pour une quantité K de photons émis, à la distance r on retrouvera $\frac{K}{r^2}$ photons par unité de surface ce qui « explique » la force en question.

Dans le cas de la gravitation nous devons faire intervenir une variable supplémentaire : le temps (qui n'intervient pas pour l'électromagnétisme car le temps propre d'un photon est nul et donc fixé une fois pour toutes).

Supposons qu'une particule, le graviton, serve de vecteur à la force gravitationnelle et qu'une masse quelconque émette K gravitons dans toutes les directions de l'espace-temps à 4 dimensions ; à la distance r on retrouvera $\frac{K}{r^3}$ gravitons (inversement proportionnel au volume d'une sphère), soit une force en $1/r^3$…

Si cette idée est correcte pour quelle raison la loi de Newton serait-elle en $1/r^2$? A priori le temps n'est pas trop variable dans notre système solaire et un peu comme dans le cas du photon ne doit pas intervenir réellement ; on fixe donc cette variable ce qui nous ramène dans un espace classique à 3 dimensions et on récupère notre loi en $1/r^2$, les coniques et tout le tremblement. La stabilité du temps à l'intérieur du système solaire est due certainement à la masse du Soleil et on doit voir apparaître des variations temporelles lorsqu'on s'en éloigne : les sondes Voyager qui sont en train de quitter le système solaire subissent actuellement une accélération imprévue qui pourrait s'expliquer par ce biais.

Une autre situation non-expliquée est celle de la formation des galaxies spirales (comme la nôtre…) : si nous envisageons une force en $1/r^3$ par rapport au centre de la galaxie le problème se résout de lui-même avec un temps « instable » ; chaque système solaire, chaque étoile possède alors un temps propre, la galaxie dans son ensemble fonctionne dans un intervalle de temps suffisamment large pour autoriser ce type de configuration.

Là encore ce ne sont que des idées personnelles mais il est toujours intéressant d'en émettre.

Un travail qui ne doit pas être très amusant serait de refaire l'étude précédente dans les quaternions…

Pour d'autres exemples voir
http://irem.u-strasbg.fr/irem/ouvert/Ouvert97/Les%20spirales.pdf