

[accueil](#)

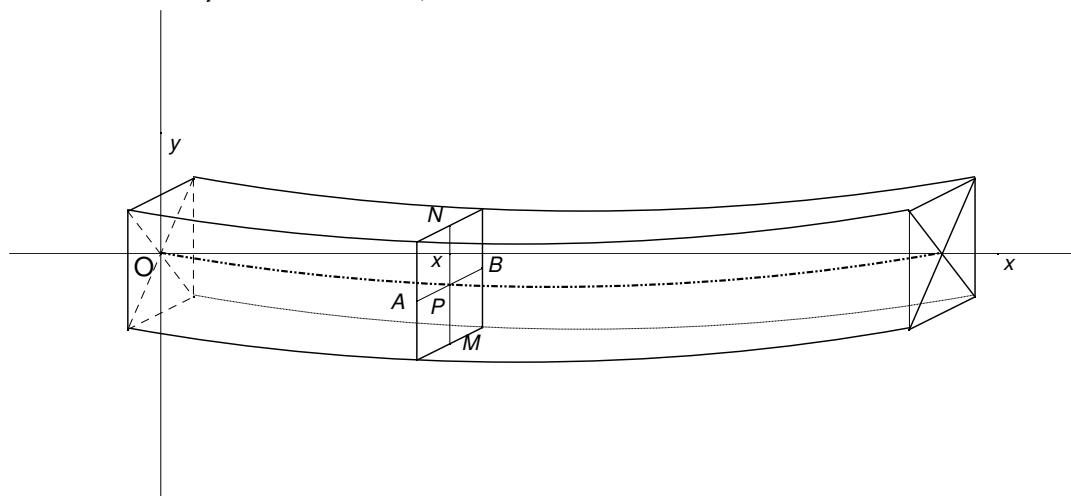
Poutres

Sommaire

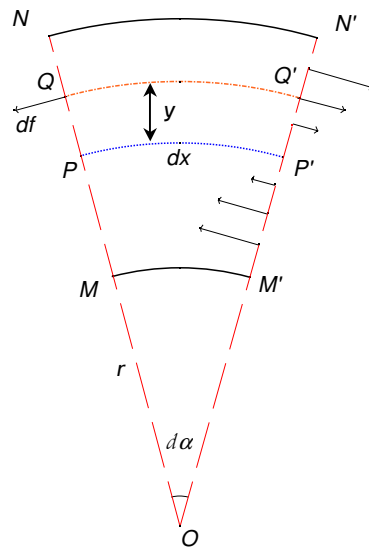
1. Flexion plane
2. Poutres horizontales
 - 2-a : Poutre posée à ses deux extrémités supportant une charge uniforme
 - 2-b : Poutre posée à ses deux extrémités supportant une charge uniforme w et une charge isolée W au milieu
 - 2-c : Poutre encastrée à une extrémité supportant une charge de densité uniforme w
 - 2-d : Poutre encastrée à une extrémité supportant une charge de densité uniforme w et 2 masses W
 - 2-e : Poutre encastrée aux deux extrémités supportant une charge de densité uniforme w et une masse W

1. Flexion plane

On veut déterminer la déformation verticale d'une poutre horizontale de section et de densité uniformes. On peut considérer cette poutre comme constituée de fibres parallèles et de même longueur (comme dans le bois même si ce n'est pas le cas en réalité).



La poutre est donc déformée verticalement, on cherche à déterminer la trajectoire (déformée) du point $P(x, y)$ dans le repère (xOy) tel qu'il est indiqué sur la figure. Cette déformation se caractérise par des fibres comprimées (celles au dessus de la surface contenant le segment $[AB]$ et parallèle à la poutre) et des fibres tendues (celles en-dessous de cette surface) ; la surface elle-même est « neutre ».



Sur la figure ci-dessus NN' est une fibre allongée, MM' une fibre comprimée et PP' la fibre neutre. La distance horizontale entre deux plans de coupe sur la fibre neutre est ici notée dx , le rayon de courbure OP est r , O est le centre de courbure, $d\alpha = \frac{dx}{r}$ l'angle $\widehat{POP'}$. Une fibre QQ' située à la distance $r + y$ de O subit un allongement relatif $\frac{y d\alpha}{dx} = \frac{y}{r}$: elle est donc étirée si y est positif, comprimée si y est négatif par

des forces (symbolisées par les petits vecteurs) $df = EdS \frac{y}{r}$ où E est le module d'élasticité de la poutre (équivalent de la raideur d'un ressort) et dS la section de la fibre.

L'ensemble des forces agissant sur la section MN équivaut à un couple de « fléchissement » dont le moment, perpendiculaire au plan de coupe est $M = \sum EdS \frac{y^2}{r} = \frac{E}{r} j$ où $j = \sum y^2 dS$ est le moment d'inertie de la section transversale par rapport à $[AB]$. Les principes de minimisation énergétique font que j est minimal au centre de gravité qui est situé sur la ligne neutre, en P . E et j sont en fait des constantes associées aux caractéristiques physiques de la poutre.

Le rayon de courbure en coordonnées cartésiennes s'écrit $r = \frac{(1+y'^2)^{3/2}}{y''}$, mais la pente de la déformée reste toujours assez faible et on peut considérer que y' reste petit et que y'^2 est négligeable. On a donc l'équation générale (on trouve souvent j noté I)

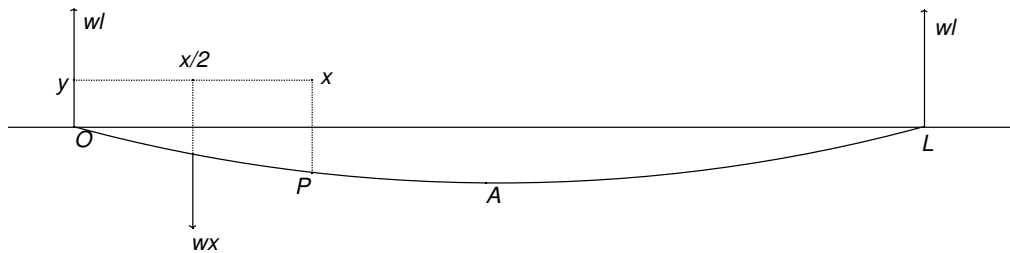
$$(E) \quad M = E j y'' \text{ ou } M = E I y''.$$

2. Poutres horizontales

Le problème peut se traiter à partir du rayon de courbure (on considère alors que $dS \approx x d\alpha$) mais les résultats sont un peu moins intéressants que ce que nous allons regarder.

Nous allons traiter plusieurs situations : une poutre posée à ses deux extrémités, une poutre encadrée à ses deux extrémités (la tangente sera horizontale aux deux bouts), une poutre en console encadrée à une extrémité et libre à l'autre, enfin une poutre encadrée à une extrémité et posée de l'autre.

2-a : **Poutre posée à ses deux extrémités supportant une charge uniforme**



On prend la longueur $OL = 2l$.

Si w est la densité de charge uniforme répartie sur toute la longueur de la poutre il y a une réaction du point d'appui en O et en L égale chacune à la moitié de $w(2l)$, soit wl ; par ailleurs le segment de poutre entre O et P appuie d'une force wx où x est la distance horizontale de O à P . On peut considérer que ce poids est appliqué au centre de gravité du segment $[OP]$, soit en $\frac{x}{2}$.

Le moment total M est alors constitué de la force wl s'appliquant à la distance x de P , soit wlx , diminué de la force wx s'appliquant à la distance $x/2$ de P , soit $M = wl x - wx \left(\frac{1}{2} x \right)$. On remplace dans (E) :

$$EIy'' = wl x - \frac{1}{2} wx^2 .$$

Les conditions initiales sont les suivantes :

- * à l'origine on a $y(0) = 0$;
- * au milieu de la poutre la tangente est horizontale, on a $y'(l) = 0$.

On intègre deux fois de suite : $Ely' = \frac{1}{2} wlx^2 - \frac{1}{6} wx^3 + K_1$ puis $Ely = wl \frac{1}{6} x^3 - \frac{1}{24} wx^4 + K_1 x + K_2$;

avec $y(0) = 0$: $0 = 0 - 0 + 0 + K_2 \Leftrightarrow K_2 = 0$;

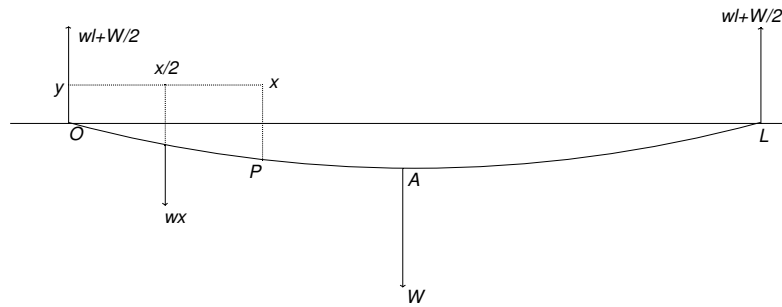
avec $y'(l) = 0$: $0 = \frac{1}{2} wl^3 - \frac{1}{6} wl^3 + K_1 l \Leftrightarrow K_1 = -\frac{wl^3}{3}$.

On a donc finalement $y = \frac{1}{EI} \left(wl \frac{1}{6} x^3 - \frac{1}{24} wx^4 - \frac{l^3}{3} wx \right) = \frac{w}{24EI} (-x^4 + 4lx^3 - 8l^3 x)$. La flèche maximale est

alors obtenue au milieu de la poutre : $y_{\max} = \frac{w}{24EI} (-l^4 + 4l^4 - 8l^4) = -\frac{5wl^4}{24EI}$ (négatif puisqu'en dessous de l'axe).

On se doute que la résolution sans simplifier r est très compliquée, mais on doit pouvoir faire une simulation numérique pour comparer.

2-b : Poutre posée à ses deux extrémités supportant une charge uniforme w et une charge isolée W au milieu



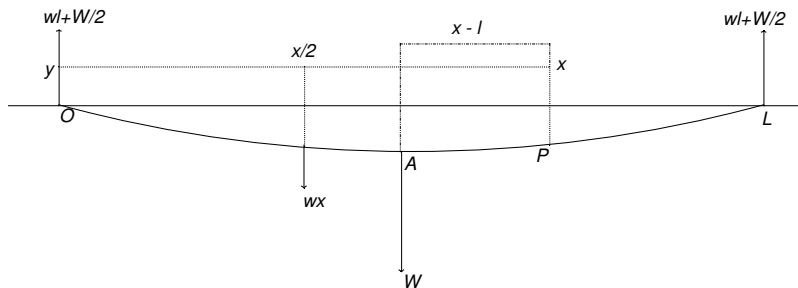
Deux cas se présentent dans l'analyse de la situation : lorsque $x < l$ et lorsque $x > l$.

$0 \leq x \leq l$: La réaction en O et L est $wl + \frac{1}{2}W$, le reste du raisonnement est le même et le moment vaut

$$M = \left(wl + \frac{1}{2}W \right) x - wx \left(\frac{1}{2}x \right) = wl x + \frac{1}{2}Wx - \frac{1}{2}wx^2.$$

$l \leq x \leq 2l$: il faut rajouter une force : la charge W au milieu de la poutre ; le moment vaut alors

$$M = \left(wl + \frac{1}{2}W \right) x - wx \left(\frac{1}{2}x \right) - W(x-l) = \left(wl - \frac{1}{2}W \right) x - \frac{1}{2}wx^2 + Wl.$$



Plutôt que de résoudre les deux cas séparément, on peut remarquer que dans le premier cas on a

$$M = wl x + \frac{1}{2}Wx - \frac{1}{2}wx^2 = wl x - \frac{1}{2}wx^2 + \frac{1}{2}W(x-l) + \frac{1}{2}Wl$$

et dans le deuxième

$$M = wl x - \frac{1}{2}wx^2 - \frac{1}{2}W(x-l) + \frac{1}{2}Wl,$$

soit finalement

$$M = wl x - \frac{1}{2}wx^2 \pm \frac{1}{2}W(x-l) + \frac{1}{2}Wl.$$

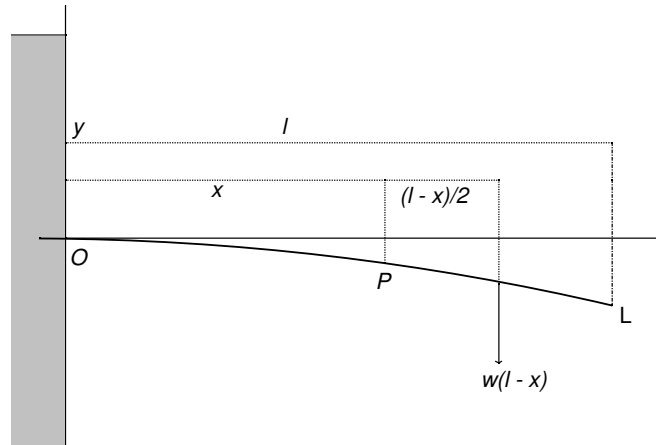
L'équation se résout de la même manière que précédemment et le lecteur pourra vérifier que

$$y_{\max} = - \left(\frac{5wl^4}{24EI} + \frac{Wl^3}{6EI} \right).$$

Le signe \pm disparaît puisque y_{\max} se situe au milieu où le terme $x - l$ s'annule.

2-c : **Poutre encastrée à une extrémité supportant une charge de densité uniforme w**

Le fait que la poutre soit encastrée se traduit dans l'analyse de la situation par la disparition de la réaction du point d'appui et seule la force de densité w apparaît.



La force à considérer au point P est la masse de la partie de poutre restant jusqu'à L dont on considère qu'elle s'applique au milieu de $[PL]$. Le moment M est alors

$$M = -\frac{1}{2}(l-x)(w(l-x)) = -\frac{1}{2}w(l^2 - 2xl + x^2)$$

(attention au signe : la force est opposée à la direction de l'axe).

L'équation à résoudre est alors $y'' = -\frac{w}{2EI}(l^2 - 2xl + x^2)$, ce qui donne $y' = -\frac{w}{2EI}\left(l^2x - lx^2 + \frac{1}{3}x^3\right) + K_1$ et

$$y = -\frac{w}{2EI}\left(\frac{1}{2}l^2x^2 - \frac{1}{3}lx^3 + \frac{1}{12}x^4\right) + K_1x + K_2.$$

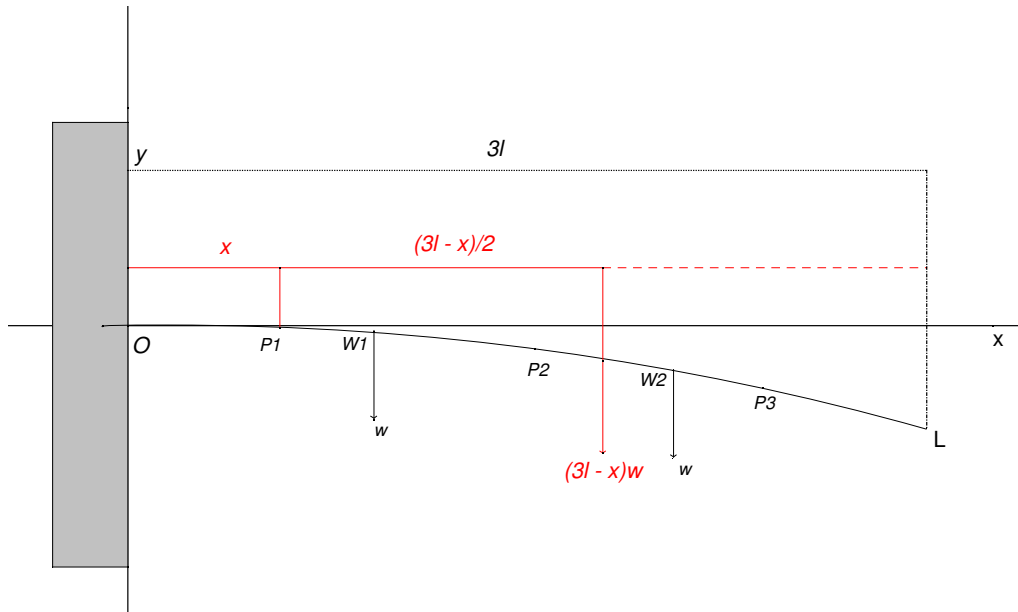
A l'origine la tangente à la courbe est horizontale donc $y'(0) = 0$, ce qui donne $K_1 = 0$ et on a $y(0) = 0$, ce qui donne $K_2 = 0$. On a donc $y = \frac{w}{24EI}(4lx^3 - 6l^2x^2 - x^4)$.

La flèche maximum est bien évidemment en $x = l$, elle vaut alors $y_{\max} = \frac{wl^4}{8EI}$. Ceci peut se vérifier par le calcul sans difficultés.

2-d : **Poutre encastrée à une extrémité supportant une charge de densité uniforme w et 2 masses W**

Pour simplifier on prend les masses W à $1/3$ et à $2/3$ de l'origine (les courageux pourront compliquer avec davantage de masses et des positions plus tordues...)

Ici il faut regarder ce qui se passe sur les différents segments : entre O et W_1 ($0 < x < l$), entre W_1 et W_2 ($l < x < 2l$), enfin de W_2 à l'extrémité L ($2l < x < 3l$). Dans chaque cas on considèrera les forces appliquées à droite de P_i pour le calcul des moments de flexion.



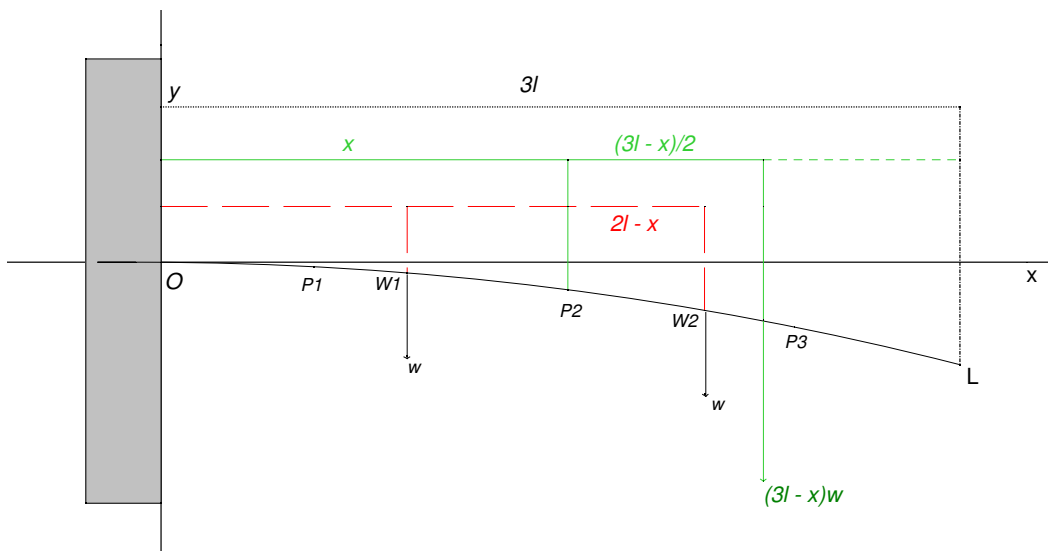
On commence entre O et W_1 : P_1 est un point de l'arc $\widehat{OW_1}$ situé à la distance x de W_1 ; 3 forces agissent sur le segment $[P_1L]$: le poids de la poutre $(3l-x)w$ agissant au milieu du segment, soit en $\frac{1}{2}(3l-x)$, la charge en W_1 agissant en $l-x$ de P_1 et la charge en W_2 agissant en $2l-x$ de P_1 . Le moment de flexion en P_1 est alors :

$$M_1 = -(3l-x)w \frac{1}{2}(3l-x) - W(l-x) - W(2l-x) = -\frac{1}{2}w(3l-x)^2 - W(3l-2x).$$

On a donc $y'' = \frac{-w}{2EI}(3l-x)^2 - \frac{W}{EI}(3l-2x)$ que l'on intègre deux fois pour obtenir :

$$y_1 = -\frac{1}{24EI} [w(3l-x)^4 + W(3l-2x)^3 + K_1x + K_2].$$

En O on a $y_1(0) = 0$ et $y_1'(0) = 0$ d'où $K_1 = 4w(3l)^3 + 6W(3l)^2$ et $K_2 = -w(3l)^4 - W(3l)^3$.

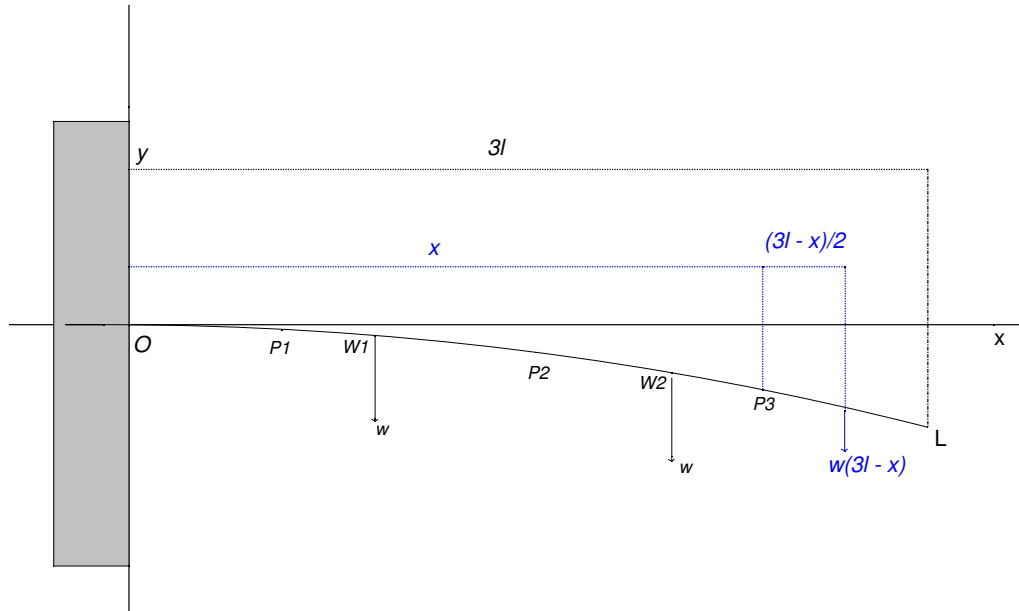


Entre W_1 et W_2 : le moment de flexion en P_2 est $M_2 = -\frac{1}{2}w(3l-w)^2 - W(2l-x)$, ce qui donne la solution

$y = -\frac{1}{24EI} [w(3l-x)^4 + 4W(2l-x)^3 + K_1'x + K_2']$. Les constantes s'obtiennent par les conditions de raccord :

$y_1(l) = y_2(l)$ et $y_1'(l) = y_2'(l)$, ce qui donne les mêmes constantes que dans le premier cas.

Enfin entre W_2 et L :



n'intervient ici que la masse de l'arc $\widehat{P_3L}$, soit $M_3 = -\frac{1}{2}(3l-x)^2$ d'où la solution

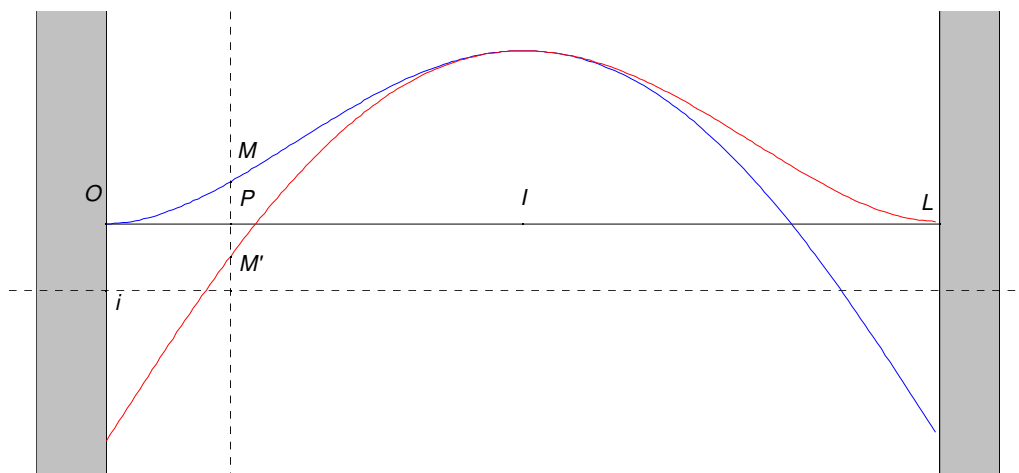
$y_3 = -\frac{1}{24EI} (w(3l-x)^4 + K_1''x + K_2'')$. Le raccord se fait avec $y_2(2l) = y_3(2l)$ et $y_2'(2l) = y_3'(2l)$ d'où encore une fois les mêmes constantes.

En fait on s'aperçoit que la courbe y_3 donne par simple translation les deux autres : on est en présence de B-splines !

Vous pouvez vérifier que la flèche maximum a lieu en $L = 3l$ et vaut $y_{\max} = -\frac{1}{8EI} (81wl^4 + 48Wl^3)$.

2-e : **Poutre encastree aux deux extremités supportant une charge de densité uniforme w et une masse W**

Dernière situation que nous examinerons. Une différence importante avec les cas précédents est l'existence d'un couple constant K (inconnu) exercé par l'encastrement du mur. Sinon les raisonnements sont similaires.



On considère que W s'applique au milieu I de la poutre. On oriente les y vers le haut.

Sur $[OP]$, P à la distance x du mur avec $0 \leq x \leq \frac{l}{2}$ on a la force wx appliquée en $x/2$ (vers le bas), la réaction du mur, $\frac{1}{2}(wl+W)$, appliquée en O (vers le haut), le couple K , soit un moment total $M = K + \frac{1}{2}(wl+W)x - \frac{1}{2}wx^2$.

Lorsque P passe de l'autre côté de I , soit lorsque $\frac{l}{2} \leq x \leq l$, il faut rajouter à M le moment dû à W qui s'applique en $x - \frac{1}{2}l$: $M_1 = M - \frac{1}{2}W(x - \frac{1}{2}l)$.

La première équation $EIy'' = K + \frac{1}{2}(wl+W)x - \frac{1}{2}wx^2$ donne

$$y = \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{2}Kx^2 + \frac{1}{12}(wl+W)x^3 - \frac{1}{24}wx^4 + C_1x + C_2 \right).$$

Comme on doit avoir $y(0) = y'(0) = 0$ on a $C_1 = C_2 = 0$ d'où (courbe bleue sur la figure) :

$$y = \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{2}Kx^2 + \frac{1}{12}(wl+W)x^3 - \frac{1}{24}wx^4 \right).$$

La seconde équation est $EIy_1'' = M - \frac{1}{2}W(x - \frac{1}{2}l)$, ce qui donne

$$y_1 = y + \frac{W}{12EI} (3lx^2 - 2x^3) + C_1x + C_2 ;$$

Les conditions de raccord sont $y(l/2) = y_1(l/2)$ et la même chose pour les dérivées. On en tire alors des valeurs de C_1 et C_2 qui permettent d'écrire que (courbe rouge sur la figure) :

$$y_1 = y + \frac{W}{48EI} (l-2x)^3.$$

Il reste encore un paramètre indéterminé : le couple K que l'on obtient en faisant soit $y_1(l) = y_1'(l) = 0$, soit $y_1'(l/2) = 0$, ce qui donne $K = \frac{-l}{24}(3W + 2wl)$ (remarquez que ce couple est négatif et représente la quantité de mouvement due à la poutre).

La flèche maximum est alors obtenue en $y_{\max} = -\frac{1}{384EI} (wl^4 + 2Wl^3)$.

Pour vous entrainer : poutre encastrée d'un côté reposant de l'autre, poutre supportant diverses charges à des endroits variés, poutre non homogène...

Pour aller plus loin :

mouvement d'une poutre soumise à des vibrations : voir poutres_vibrations

Sources :

Internet

http://www.enpc.fr/fr/formations/ecole_virt/cours/pecker/chapitre1.pdf

(remplacer le 1 de chapitre par 2, 3, ..., 8, les poutres sont entre autres dans le ch. 3).

problème du flambage pour une poutre verticale : quelques sites internet en parlent mais pas toujours très clairs, voir quand même

<http://www.ulb.ac.be/smc/cours/cnst338/15-instabilites.PDF>

<http://perso.wanadoo.fr/philippe.fichou/Poutre/poutre.htm>

Livres

P. Fleury, J.-P. Mathieu, *Physique générale et expérimentale*, Eyrolles, 1961.

F. Ayres Jr, *Théorie et applications des équations différentielles*, série Schaum, McGrawHill, 1986.