

[accueil](#)

## Les fonctions de Bessel

1. Le point de vue différentiel
  - 1-a : Un fil
  - 1-b : L'équation de Bessel
  - 1-c : Fonction de Bessel de seconde espèce
  - 1-d : Quelques résolutions d'équations différentielles
  - 1-e : L'équation des ondes en coordonnées cylindriques
  - 1-f : L'équation des ondes en coordonnées sphériques
  - 1-g : Retour à l'équation du fil
2. Le point de vue complexe
  - 2-a : Fonction génératrice
  - 2-b : Représentation par une intégrale de Cauchy
  - 2-c : Formule d'addition
  - 2-d : Formules de récurrence
3. Comportement asymptotique
4. Zéros des fonctions de Bessel
  - 4-a : Propriétés de base
  - 4-b : Fonctions de Bessel comme produit infini
5. Transformée de Hankel
  - 5-a : Un résultat remarquable
  - 5-b : Intégrale de Sonine
  - 5-c : Relations entre transformées de Hankel et de Fourier
6. Fonctions de Bessel et transformée de Laplace
  - 6-a : Transformée de Laplace des fonctions de Bessel
  - 6-b : Calcul de l'image de  $1/p$  connaissant celle de  $p$
  - 6-c : Quelques résultats complémentaires



Daniel  
Bernoulli



Wilhem Bessel



Joseph Fourier



Hermann  
Hankel



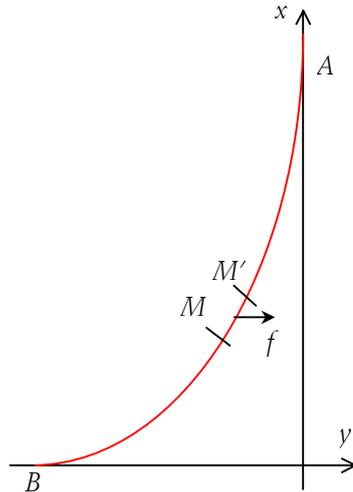
Carl Neumann  
1832-1925

Le travail ici présenté n'a aucune prétention à l'exhaustivité. Cette partie est essentiellement théorique même si on commence avec un problème de physique classique. Une deuxième partie contiendra diverses applications à l'Optique, la Mécanique quantique, la Mécanique classique, l'Astronomie, l'Electricité, etc.

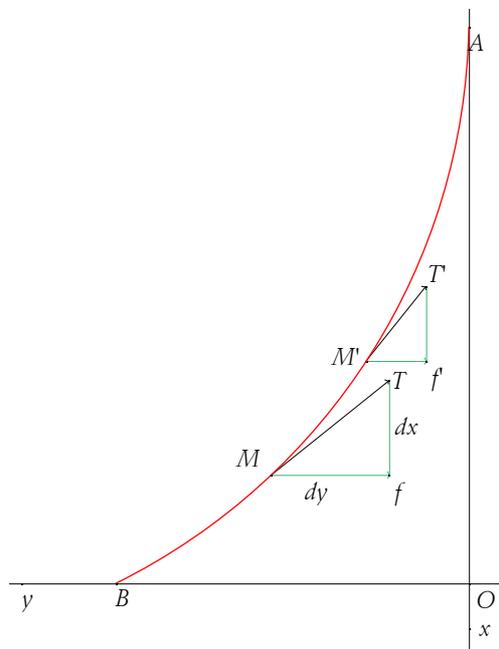
## 1. Le point de vue différentiel

### 1-a : Un fil

On suspend un fil à un crochet, quelque part sur la longueur on l'écarte de sa position d'équilibre et on le lâche... Quelle est alors la courbe décrite par ce fil ? Daniel Bernoulli rencontra le problème en 1732 et donna sa solution qui fait appel aux fonctions de Bessel, lesquelles ne seront réellement étudiées que beaucoup plus tard par l'astronome allemand Friedrich Bessel en 1824.



Soit donc un fil pesant de longueur  $l$ , homogène et non rigide, attaché à une extrémité  $A$ . Au repos il pend verticalement (on peut faire le montage avec une chaîne dont les maillons sont suffisamment petits). Nous écartons le fil de sa position d'équilibre et nous nous intéressons aux petites oscillations planes du fil. On appelle  $(Ox)$  l'axe vertical et  $(Oy)$  l'axe horizontal, soit également  $\rho$  la densité du fil.



Prenons deux points  $M$  et  $M'$  voisins sur le fil : la force  $f$  qui agit sur le segment  $[MM']$  (supposé de longueur unité, mais ça ne change rien à l'affaire) est la projection horizontale de la tension  $T$  du fil quand on passe de  $M$  à  $M'$ , on a donc  $f = T \cos \theta \approx T \cot \theta = T \frac{\partial y}{\partial x}$  d'où  $(f' - f) \partial x = \left[ T' \frac{\partial y}{\partial x} - T \frac{\partial y}{\partial x} \right]$  et la

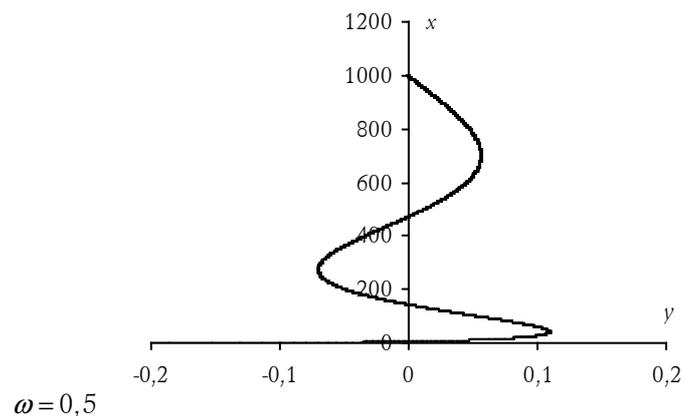
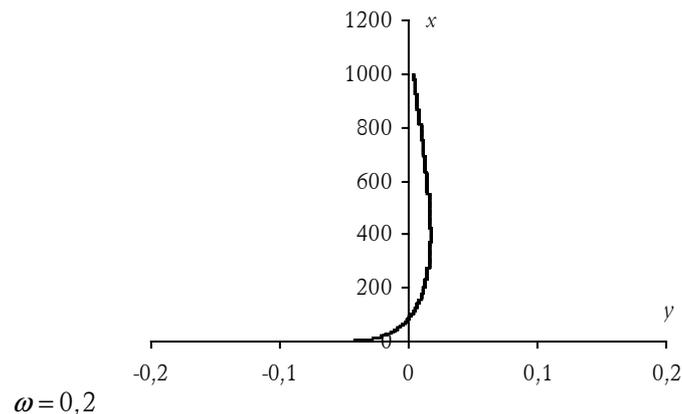
différentielle suivant les  $x$  est alors  $f = \frac{\partial}{\partial x} \left( T \frac{\partial y}{\partial x} \right)$ . Par ailleurs la tension est compensée verticalement à la hauteur  $x$  sur le segment  $[MM']$  par  $T = \rho g x$  d'où  $f = \rho g \frac{\partial}{\partial x} \left[ x \frac{\partial y}{\partial x} \right] = \rho g \left[ \frac{\partial y}{\partial x} + x \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right]$ ; par ailleurs la force d'inertie horizontale sur le segment est  $\rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$  d'où l'équation du mouvement :

$$(1.a.1) \quad \frac{1}{g} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial y}{\partial x} + x \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}.$$

Cette équation a bien sûr des tas de solutions possibles, aussi limitons nous aux fonctions sinusoidales de  $t$  :  $u(x, t) = \varphi(x)e^{i\omega t}$ ; nous obtenons alors  $\frac{\partial u}{\partial t} = i\omega\varphi(x)e^{i\omega t}$  et  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\omega^2\varphi(x)e^{i\omega t}$ , de même  $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{d\varphi}{dx}e^{i\omega t}$  et  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{d^2\varphi}{dx^2}e^{i\omega t}$  d'où après simplification l'équation :

$$(1.a.2) \quad -\frac{\omega^2}{g}\varphi = \frac{d\varphi}{dx} + x \frac{d^2\varphi}{dx^2} \Leftrightarrow \frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{d\varphi}{dx} + \frac{\omega^2}{g} \frac{1}{x}\varphi = 0 \Leftrightarrow y'' + \frac{1}{x}y' + \frac{k}{x}y = 0.$$

Nous faisons un essai de résolution numérique avec l'ordonnée maximale  $l = 1000$ , l'écart initial en  $y$  de 10 et diverses valeurs de  $\omega$  :



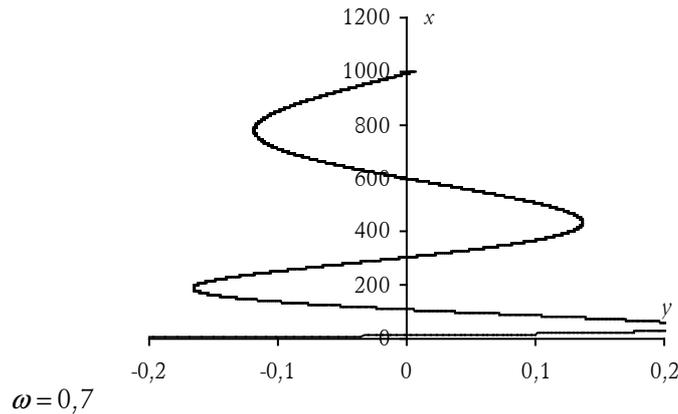


fig. 1 : résolution numérique (Excel)

Pour chaque valeur de la pulsation on obtient une fonction différente, mais on peut comparer avec l'équation des ondes et se dire que l'on peut trouver une solution générale...

On peut opérer en utilisant la méthode d'intégration par les séries, ce qui va effectivement donner une fonction déterminée, la fonction de Bessel d'ordre 0, mais plutôt que de faire ce travail dans le cas particulier du fil nous allons généraliser à l'équation de Bessel dont un cas particulier est l'équation du fil.

**1-b : L'équation de Bessel**

C'est l'équation

$$(1.b.1) \quad \frac{d^2y}{dz^2} + \frac{1}{z} \frac{dy}{dz} + \left(1 - \frac{\nu^2}{z^2}\right)y = 0 ;$$

que l'on rencontre dans de nombreux problèmes de physique, particulièrement ceux présentant une symétrie cylindrique : problèmes de membranes, oscillations électro-magnétiques dans une cavité cylindrique (comme un fil électrique...), déplacement libre d'une particule en Mécanique Quantique, etc.

Nous cherchons donc des solutions (méthode dite de *Frobenius*) sous forme de série entière de la forme

$$y = z^p \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n : \frac{dy}{dz} = pz^{p-1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \text{ et } \frac{d^2y}{dz^2} = p(p-1)z^{p-2} \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \text{ d'où en remplaçant dans l'équation et en}$$

identifiant les coefficients les relations :

$$\begin{aligned} (p^2 - \nu^2)a_0 &= 0 \\ \left[ (p+1)^2 - \nu^2 \right] a_1 &= 0 \\ \dots\dots\dots & \\ \left[ (p+n)^2 - \nu^2 \right] a_n + a_{n-2} &= 0 \end{aligned} ;$$

la première relation nous donne  $p = \pm \nu$ , choisissons  $\nu$  positif s'il est réel ou de partie réelle positive s'il est imaginaire ;  $a_0$  est alors quelconque.

*Premier cas* : si  $p = \nu (>0)$  on a alors

$$(2p+1)a_1 = 0, (4p+4)a_2 + a_0 = 0, (6p+9)a_3 + a_1 = 0 \dots, (2pn+n^2)a_n + a_{n-2} = 0$$

donc les coefficients d'ordre impair sont nuls et les pairs s'obtiennent en fonction de  $a_0$  :

$$a_{2r} = a_0 \frac{(-1)^r}{2^{2r} r! (1+\nu)(2+\nu)\dots(r+\nu)}.$$

On définit alors la fonction de Bessel  $J_\nu$  de première espèce d'ordre  $\nu$  par le choix de  $a_0 = \frac{1}{2\Gamma(1+\nu)}$ , ce qui permet de donner une écriture compacte de  $J_\nu$  grâce à la propriété de base de la fonction *gamma* :

$\Gamma(1+r+\nu)=(1+\nu)(2+\nu)\dots(r+\nu)\Gamma(1+\nu)$  (on se rappelle que la fonction *gamma* est comme une factorielle... voir [http://promenadesmaths.free.fr/Fonctions complexes\\_gamma.htm](http://promenadesmaths.free.fr/Fonctions complexes_gamma.htm)). Nous écrivons donc

$$(1.b.2) \quad J_\nu(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r!\Gamma(\nu+r+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2r}$$

et si  $\nu$  est un nombre entier  $n$ ,  $J_n(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^n \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r!(n+r)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2r}$ .

*Deuxième cas* : si  $\nu = -p$ , les coefficients pairs sont tels que  $2r(2r+1-2\nu)a_{2r} + a_{2r-2} = 0$  et les coefficients impairs tels que  $2r(2r+1-2\nu)a_{2r+1} + a_{2r-1} = 0$  ; si  $\nu$  n'est pas de la forme  $\frac{2m+1}{2}$ ,  $m \in \mathbb{N}$  alors les coefficients impairs sont nuls et de la même manière on obtient

$$(1.b.3) \quad J_{-\nu}(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^{-\nu} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r!\Gamma(-\nu+r+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2r}$$

Dans le cas où  $\nu$  n'est pas entier, les fonctions  $J_\nu$  et  $J_{-\nu}$  sont linéairement indépendantes et forment une base de l'espace des solutions : en effet, la fonction  $\Gamma$  ne prend des valeurs infinies que pour des valeurs entières, aussi lorsqu'on fait tendre  $z$  vers 0,  $J_\nu$  tend vers 0 (à cause du terme  $\left(\frac{z}{2}\right)^\nu$ ) alors que la fonction

$J_{-\nu}$  tend vers l'infini (à cause du terme  $\left(\frac{z}{2}\right)^{-\nu}$ ). On a donc la forme générale des solutions, également appelées *fonctions cylindriques* :

$$(1.b.4) \quad Z_\nu(z) = AJ_\nu(z) + BJ_{-\nu}(z)$$

Dans le cas où  $\nu$  est entier égal à  $n$  on a  $\Gamma(-\nu+r+1) = \Gamma(r-n+1)$ , or  $\Gamma(k) = \infty$  si  $k$  est un entier négatif, donc tous les termes de  $J_{-n}$  sont nuls jusqu'à un rang  $r'$  où  $r'$  est le dernier entier pour lequel  $r-n+1 < 0$  ; nous pouvons alors écrire

$$(1.b.5) \quad J_{-n}(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^{-n} \sum_{r'=0}^{\infty} \frac{(-1)^{r'+n}}{r'!(r'+n)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2r'+2n} = (-1)^n \left(\frac{z}{2}\right)^n \sum_{r'=0}^{\infty} \frac{(-1)^{r'}}{r'!(r'+n)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2r'} = (-1)^n J_n(z)$$

et nos deux fonctions ne sont plus indépendantes. Comme l'équation de Bessel est d'ordre 2, l'espace des solutions l'est également, il nous faut donc trouver une deuxième solution...

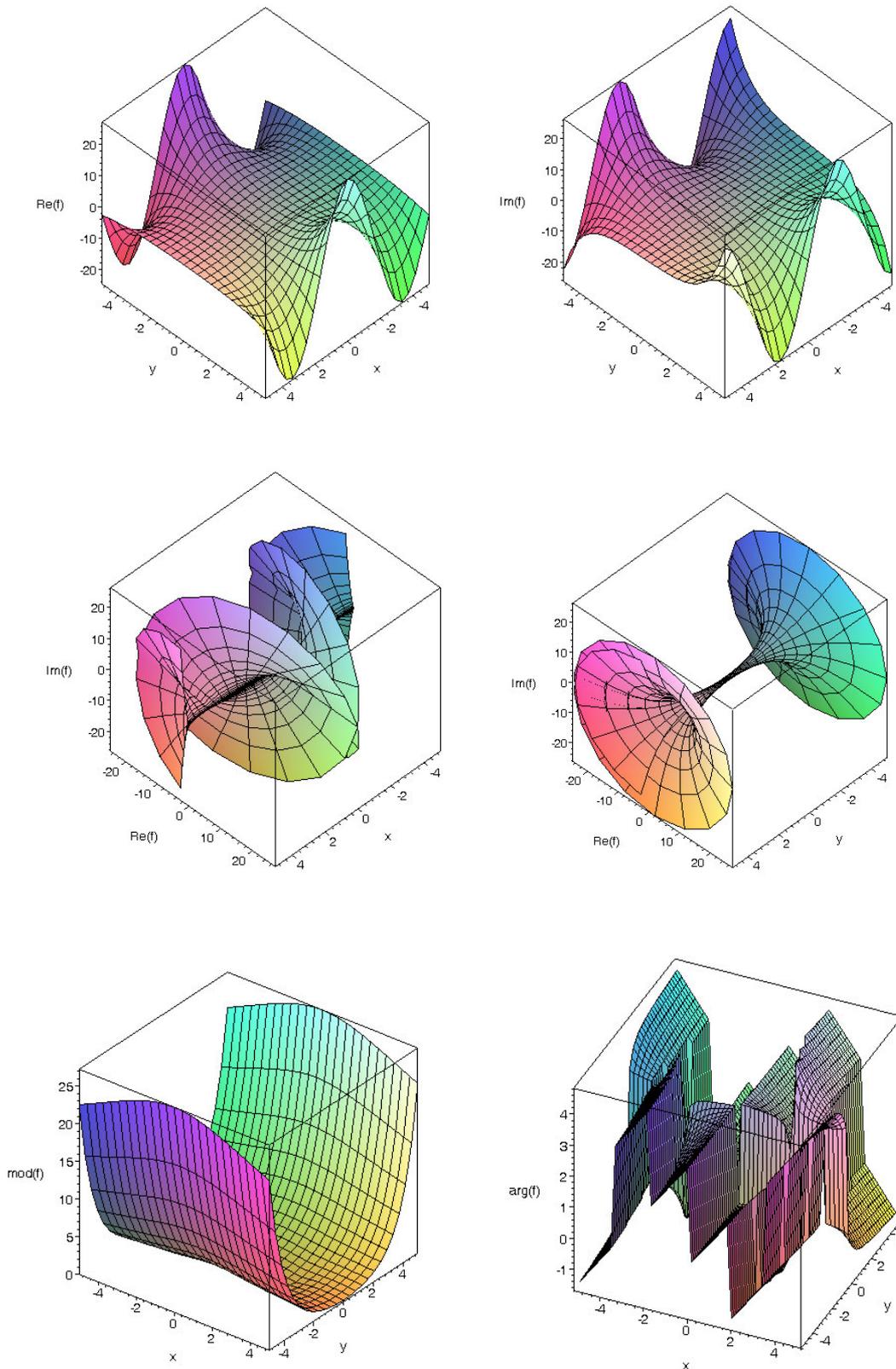


fig. 2 : représentations de la fonction  $J_0(z)$   
 (animations pour  $J_\nu(z)$ ,  $-4 \leq \nu \leq 5$  sur <http://promenadesmaths.free.fr/Bessel/BesselJ.htm>)

### 1-c : Fonction de Bessel de seconde espèce

Nous allons chercher une fonction  $Y_\nu(z)$  telle que

$$J_{-\nu}(z) = \cos \pi \nu J_\nu(z) - \sin \pi \nu Y_\nu(z) \Leftrightarrow Y_\nu(z) = \frac{\cos \pi \nu J_\nu(z) - J_{-\nu}(z)}{\sin \pi \nu};$$

il est clair que si  $\nu$  n'est pas entier on retombe sur une solution particulière de (1.b.1) ; par contre si on fait tendre  $\nu$  vers un entier  $n$ , la fonction  $Y$  se présente comme une forme indéterminée ( $\cos \pi n = (-1)^n$ ) ; appliquons la règle du marquis de l'Hospital :

$$(1.c.1) \quad Y_n(z) = \lim_{\nu \rightarrow n} \frac{-\pi \sin \pi \nu J_\nu(z) + \cos \pi \nu J_\nu(z)' - (J_{-\nu}(z))'}{\pi \cos \pi \nu} = \frac{1}{\pi} \left[ \lim_{\nu \rightarrow n} J_\nu(z)' \right] - (-1)^n \frac{1}{\pi} \left[ \lim_{\nu \rightarrow n} (J_{-\nu}(z))' \right].$$

Il nous faut donc calculer la dérivée de  $J_\nu$  : utilisons le développement en série

$$\begin{aligned} J_\nu(z) &= \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r! \Gamma(\nu+r+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2r} = e^{\nu \ln \frac{z}{2}} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r! \Gamma(\nu+r+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2r} ; \\ \frac{dJ_\nu(z)}{d\nu} &= \ln \frac{z}{2} e^{\nu \ln \frac{z}{2}} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r! \Gamma(\nu+r+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2r} + \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \sum_{r=0}^{\infty} \frac{-(-1)^r \Gamma'(\nu+r+1)}{r! \Gamma^2(\nu+r+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2r} \\ &= \ln \frac{z}{2} J_\nu(z) - \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r! \Gamma(\nu+r+1)} \frac{\Gamma'(\nu+r+1)}{\Gamma(\nu+r+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2r+\nu} . \end{aligned}$$

Faisons tendre  $\nu$  vers  $n$ , la dérivée logarithmique de  $\Gamma$  est la fonction digamma :  $\frac{\Gamma'(\nu+r+1)}{\Gamma(\nu+r+1)} = \psi(\nu+r+1)$

d'où

$$(1.c.2) \quad \lim_{\nu \rightarrow n} \frac{dJ_\nu(z)}{d\nu} = \ln \frac{z}{2} J_n(z) - \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r!(n+r)!} \psi(n+r+1) \left(\frac{z}{2}\right)^{2r+n} ;$$

pour  $J_{-\nu}(z)$  nous utilisons la formule des compléments :

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z} \Rightarrow \Gamma(\nu-r)\Gamma(1-\nu+r) = \frac{\pi}{\sin \pi(\nu-r)} = \frac{\pi}{\sin(\pi\nu - \pi r)} = \frac{\pi}{(-1)^r \sin \pi \nu},$$

soit en séparant la sommation à l'ordre  $n-1$ ,  $n$  étant l'entier immédiatement supérieur à  $\nu$  :

$$J_{-\nu}(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^{-\nu} \sum_{r=0}^{n-1} \frac{\Gamma(\nu-r) \sin \pi \nu}{r! \pi} \left(\frac{z}{2}\right)^{2r} + \left(\frac{z}{2}\right)^{-\nu} \sum_{r=n}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r! \Gamma(-\nu+r+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2r} ;$$

il nous reste à dériver par rapport à  $\nu$  :

$$\frac{dJ_{-\nu}(z)}{d\nu} = -J_{-\nu}(z) \log \left(\frac{z}{2}\right) + \sum_{r=0}^{n-1} \frac{1}{r!} \left( \Gamma'(\nu-r) \frac{\sin \pi \nu}{\pi} + \Gamma(\nu-r) \cos \pi \nu \right) \left(\frac{z}{2}\right)^{-\nu+2r} + \sum_{r=n}^{\infty} \frac{(-1)^r \Gamma'(-\nu+r+1)}{r! \Gamma^2(-\nu+r+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{-\nu+2r}$$

Lorsqu'on fait tendre  $\nu$  vers  $n$ , on a

$$\lim_{\nu \rightarrow n} \frac{dJ_{-\nu}(z)}{d\nu} = -J_{-n}(z) \log \left(\frac{z}{2}\right) + (-1)^n \sum_{r=0}^{n-1} \frac{\Gamma(n-r)}{r!} \left(\frac{z}{2}\right)^{-n+2r} + \sum_{r=n}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r! \Gamma(-n+r+1)} \psi(-n+r+1) \left(\frac{z}{2}\right)^{-n+2r} ;$$

on peut alors faire un décalage de  $n$  indices en remplaçant  $r-n$  par  $r$ , ce qui donne en utilisant (1.b.5) :

$$(1.c.3) \quad \lim_{\nu \rightarrow n} \frac{dJ_{-\nu}(z)}{d\nu} = -(-1)^n J_n(z) \log \left(\frac{z}{2}\right) + (-1)^n \sum_{r=0}^{n-1} \frac{\Gamma(n-r)}{r!} \left(\frac{z}{2}\right)^{-n+2r} + (-1)^n \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{(r+n)! r!} \psi(r+1) \left(\frac{z}{2}\right)^{n+2r} .$$

On remplace (1.c.2) et (1.c.3) dans (1.c.1) :

$$Y_n(z) = \frac{2}{\pi} J_n(z) \log \frac{z}{2} - \frac{1}{\pi} \sum_{r=0}^{n-1} \frac{(n-r-1)!}{r!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2r-n} - \frac{1}{\pi} \sum_{r=0}^{n-1} \frac{(-1)^r}{r!(n+r)!} [\psi(r) + \psi(n+r)] \left(\frac{z}{2}\right)^{2r+n}.$$

C'est la solution dite de *Weber* (on trouve d'autres écritures comme  $N$  pour fonction de *Neumann*). Pour  $n = 0$ , le deuxième terme de la formule est nul.

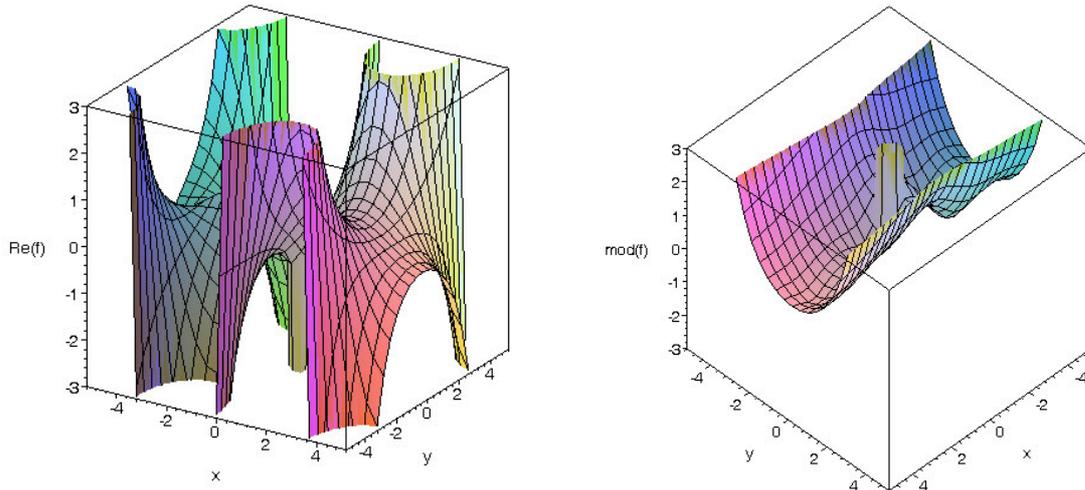


fig. 3 : représentations de la fonction  $Y_0(z)$  (animations pour  $Y_\nu(z)$ ,  $-4 \leq \nu \leq 5$  : sur <http://promenadesmaths.free.fr/Bessel/BesselY.htm>)

On définit également les fonctions suivantes :

- fonction de Bessel *modifiée* de première espèce :

$$(1.c.4) \quad I_\nu(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r! \Gamma(\nu+r+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2r} = i^{-\nu} J_\nu(iz),$$

- fonctions de *Hankel* (1) et (2) ou fonctions de Bessel du *troisième type* :

$$(1.c.5) \quad H_\nu^{(1)}(z) = J_\nu(z) + iY_\nu(z) = i \frac{J_\nu(z)e^{-i\pi\nu} - J_{-\nu}(z)}{\sin(\pi\nu)} \quad \text{et} \quad H_\nu^{(2)}(z) = J_\nu(z) - iY_\nu(z) = -i \frac{J_\nu(z)e^{i\pi\nu} - J_{-\nu}(z)}{\sin(\pi\nu)},$$

on obtient mal des expressions de  $J$  et  $Y$  en fonction des fonctions  $H$  (on peut remarquer que si  $J$  joue le rôle de  $\cos$ ,  $Y$  celui de  $\sin$ , alors  $H^{(1)}$  et  $H^{(2)}$  jouent celui des exponentielles... ) :

$$(1.c.6) \quad J_\nu(z) = \frac{1}{2} [H_\nu^{(1)}(z) + H_\nu^{(2)}(z)], \quad Y_\nu(z) = \frac{1}{2i} [H_\nu^{(1)}(z) - H_\nu^{(2)}(z)].$$

- fonction de Bessel *modifiée* de deuxième espèce :

$$(1.c.7) \quad K_\nu(z) = \frac{1}{2} \pi i^{\nu+1} H_\nu^{(1)}(iz) = \frac{\pi}{2} \frac{I_{-\nu}(z) - I_\nu(z)}{\sin(\nu\pi)}.$$

#### 1-d : Quelques résolutions d'équations différentielles

Notons  $Z_\nu(z) = AJ_\nu(z) + BY_\nu(z)$  la solution générale de l'équation (1.b.1)

$$\frac{d^2 y}{dz^2} + \frac{1}{z} \frac{dy}{dz} + \left(1 - \frac{\nu^2}{z^2}\right) y = 0.$$

En faisant le changement de variable  $z = kx$  on obtient  $\frac{dy}{dz} = \frac{1}{k} \frac{dy}{dx}$  et  $\frac{d^2y}{dz^2} = \frac{1}{k^2} \frac{d^2y}{dx^2}$  d'où

$$(1.d.1) \quad \frac{1}{k^2} \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{kx} \frac{1}{k} \frac{dy}{dx} + \left(1 - \frac{\nu^2}{k^2 x^2}\right) y = 0 \Leftrightarrow \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dy}{dx} + \left(k^2 - \frac{\nu^2}{x^2}\right) y = 0 .$$

Pour cette équation la solution générale est  $Z_\nu(kx) = AJ_\nu(kx) + BY_\nu(kx)$ .

Prenons maintenant l'équation

$$(1.d.2) \quad \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{a}{x} \frac{dy}{dx} + by = 0$$

et faisons le changement de fonction :  $y = x^p u$ , nous avons alors  $y' = px^{p-1}u + x^p u'$  et  $y'' = p(p-1)x^{p-2}u + 2px^{p-1}u' + x^p u''$  d'où en remplaçant :

$$x^p u'' + (2p+a)x^{p-1}u' + \left(p(p-1)x^{p-2} + apx^{p-2} + bx^p\right)u = 0 \Leftrightarrow u'' + \frac{2p+a}{x}u' + \left(b + \frac{p^2 - p + ap}{x^2}\right)u = 0 .$$

Si on choisit  $p$  tel que  $2p+a=1 \Leftrightarrow p = \frac{1-a}{2}$  on a  $u'' + \frac{1}{x}u' + \left(b - \frac{p^2}{x^2}\right)u = 0$  ; cette équation a pour solution

$$u = Z_p(x\sqrt{b}) = Z_{\frac{1-a}{2}}(x\sqrt{b}) \text{ d'où la solution de (1.d.2) : } y = x^p u = x^{\frac{1-a}{2}} Z_{\frac{1-a}{2}}(x\sqrt{b}) .$$

La dernière et la plus générale : soit l'équation de Bessel généralisée

$$(1.d.3) \quad \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{a}{x} \frac{dy}{dx} + \left(bx^p + \frac{c}{x^2}\right)y = 0 ;$$

en combinant les deux méthodes précédentes, à savoir poser  $x = kz^q$  puis  $y = z^m u(z)$  on aboutit (c'est franchement laborieux...) à la solution générale

$$y = x^{\frac{1-a}{2}} Z_\nu \left( \frac{2\sqrt{b}}{p+2} x^{\frac{p+2}{2}} \right) \text{ avec } \nu = \frac{\sqrt{(1-a)^2 - 4c}}{p+2} .$$

En particulier si on prend  $p = 0$ ,  $c = 0$ ,  $a = 0$ , on a l'équation  $\frac{d^2y}{dx^2} + by = 0$  qui a pour solution

$y = \sqrt{x} \cdot Z_{1/2}(\sqrt{bx})$ , ce qui montre que cosinus et sinus ne sont jamais que des fonctions de Bessel dissimulées (rien n'interdit de prendre  $b = -1$ ...).

Dans la solution précédente on a supposé évidemment que  $m$  est différent de  $-2$ . Que se passe-t-il si c'est la cas ? L'équation (1.d.3) après multiplication par  $x^2$  devient de la forme  $x^2 y'' + ax y' + ky = 0$  ; on la résout

en posant  $x = e^u$  ce qui donne  $\frac{d^2y}{du^2} + (a-1) \frac{dy}{du} + ky = 0$ , soit une équation linéaire du 2<sup>nd</sup> ordre à coefficients constants.

Quelques autres solutions d'équations bizarres et louches mais donnant des résultats intéressants :

\*  $y'' - y' \left( \frac{1}{x} + 2a \right) y' + \left( b + \frac{a}{x} - \frac{\nu^2}{x^2} \right) y = 0$  a pour solution générale si  $b \neq a^2$   $y = e^{-ax} Z_\nu \left( x\sqrt{b-a^2} \right)$  ;

\* si  $b = a^2$  on a lorsque  $\nu \neq 0$  des solutions de la forme  $y = (Ax^\nu + Bx^{-\nu})e^{-ax}$  ; si  $\nu = 0$  les solutions sont  $y = e^{-ax} (A + B \log x)$ .

$$* y'' + \left[ \frac{1}{x} - 2g(x) \right] y' + \left[ 1 - \frac{\nu^2}{x^2} + g^2(x) - g'(x) - \frac{1}{x}g(x) \right] y = 0 \text{ a comme solution } y = e^{\int g(x)dx} Z_\nu(x) ;$$

deux cas particuliers :  $g(x) = \tan x$ , solution  $y = \frac{1}{\cos x} Z_\nu(x)$  et  $g(x) = \cotan x$ , solution  $y = \frac{1}{\sin x} Z_\nu(x)$ .

#### 1-e : L'équation des ondes en coordonnées cylindriques

Comme nous l'avons dit précédemment on retrouve l'équation de Bessel dès que l'on se frotte à l'équation des ondes : en coordonnées cylindriques le laplacien s'écrit (voir *Analyse vectorielle*)

$$\Delta f = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial f}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

d'où l'équation des ondes dans ce cas s'écrit  $\Delta f = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$  ; pour les mêmes raisons que celles indiquées au ch. 11, Transformée de Fourier, les solutions sont toujours décomposables sous la forme  $f(\rho, \varphi, z, t) = e^{ikct} F(\rho, \varphi, z)$  et l'équation devient  $\Delta F = -k^2 F \Leftrightarrow \Delta F + k^2 F = 0$ .

Cherchons alors  $F$  sous la forme d'un produit de Laplace  $F = R(\rho)\Phi(\varphi)Z(z)$  :

$$\frac{\partial F}{\partial \rho} = \frac{\partial R}{\partial \rho} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial R}{\partial \rho} \right) = \frac{\partial R}{\partial \rho} + \rho \frac{\partial^2 R}{\partial \rho^2},$$

soit

$$(1.e.1) \quad \frac{\Delta F}{R\Phi Z} = \frac{1}{R\rho} \frac{\partial R}{\partial \rho} + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 R}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\Phi} \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} + k^2 = 0$$

Les deux premiers termes sont indépendants de  $z$ , on doit donc avoir  $\frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = K = \pm q^2$  d'où les solutions pour  $Z$  :  $Z_+ = A \cosh qz + B \sinh qz$  et  $Z_- = A \cos qz + B \sin qz$ . En tout cas on obtient pour (1.e.1) :

$$(1.e.2) \quad \frac{1}{R\rho} \frac{dR}{d\rho} + \frac{1}{R} \frac{d^2 R}{d\rho^2} + \frac{1}{\Phi} \frac{1}{\rho^2} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} + (k^2 \pm q^2) = 0.$$

Le même raisonnement que précédemment nous amène à poser  $\frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} = \pm \nu^2$  d'où une nouvelle fois les solutions  $\Phi_+ = A' \cosh \nu \varphi + B' \sinh \nu \varphi$  (ce cas ne se rencontre que rarement dans la pratique : le rayon vecteur ne revenant pas alors à son point de départ : solitons peut-être) et  $\Phi_- = A' \cos \nu \varphi + B' \sin \nu \varphi$  : dans ce cas pour que la fonction soit périodique il faut que  $\nu$  soit entier.

Revenons à notre équation (1.e.2) qui devient  $\frac{1}{R\rho} \frac{dR}{d\rho} + \frac{1}{R} \frac{d^2 R}{d\rho^2} + \frac{\pm \nu^2}{\rho^2} + k^2 \pm q^2 = 0$ , soit enfin

$$\frac{d^2 R}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dR}{d\rho} + R \left( \frac{\pm \nu^2}{\rho^2} + k^2 \pm q^2 \right) = 0.$$

On a donc quatre combinaisons possibles : on rappelle que pour

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{a}{x} \frac{dy}{dx} + \left( bx^p + \frac{c}{x^2} \right) y = 0 \text{ la solution est } y = x^{\frac{1-a}{2}} Z_\lambda \left( \frac{2\sqrt{b}}{p+2} x^{\frac{p+2}{2}} \right) \text{ avec } \lambda = \frac{\sqrt{(1-a)^2 - 4c}}{p+2}.$$

(1.e.3)  $\frac{-v^2}{\rho^2} + k^2 - q^2 : a = 1, p = 0, b = k^2 - q^2, c = -v^2$  d'où  $\lambda = \frac{2v}{2} = v$  et  $R = KZ_v \left( \sqrt{k^2 - q^2} \rho \right)$  ( $K$  constante complexe) ;

(1.e.4)  $\frac{-v^2}{\rho^2} + k^2 + q^2 : a = 1, p = 0, b = k^2 + q^2, c = -v^2$  d'où  $\lambda = \frac{2v}{2} = v$  et  $R = KZ_v \left( \sqrt{k^2 + q^2} \rho \right)$  ;

(1.e.5)  $\frac{v^2}{\rho^2} + k^2 + q^2 : a = 1, p = 0, b = k^2 + q^2, c = v^2$  d'où  $\lambda = \frac{2iv}{2} = iv$  et  $R = KZ_{iv} \left( \sqrt{k^2 + q^2} \rho \right)$  ;

(1.e.6)  $\frac{v^2}{\rho^2} + k^2 - q^2 : a = 1, p = 0, b = k^2 - q^2, c = v^2$  d'où  $\lambda = \frac{2iv}{2} = iv$  et  $R = KZ_{iv} \left( \sqrt{k^2 - q^2} \rho \right)$ .

Dans tout ça il faut éliminer les solutions non réelles et les solutions négatives :

pour (1.e.3) si  $k^2 - q^2 > 0$  nous pouvons poser  $k^2 - q^2 = a^2$  d'où la solution  $R = AJ_v(a\rho) + BY_v(a\rho)$  ; cette solution est également valable pour (1.e.4) avec  $k^2 + q^2 = a^2$ .

pour (1.e.3) si  $k^2 - q^2 < 0$  nous pouvons poser  $k^2 - q^2 = -a^2$  d'où la solution  $R = AI_v(a\rho) + BK_v(a\rho)$  ;

pour (1.e.5) et (1.e.6) la signification physique de  $iv$  n'est pas claire et à priori pas intéressante.

Au final les solutions sont donc  $f(\rho, \varphi, z, t) = e^{ickt} R(\rho) \Phi(\varphi) Z(z)$ , soit quatre combinaisons possibles (en ne tenant pas compte des solutions sans signification physique claire, ce qui est un peu gênant car dans le cas où on prend des coordonnées rectangulaires le nombre de combinaisons est de huit).

Lorsque l'axe (Oz) fait partie du domaine d'existence de la fonction (ce n'est pas le cas par exemple dans le cas d'un cylindre creux),  $f$  doit prendre des valeurs finies pour  $\rho = 0$ , ce qui élimine les solutions  $Y$  et  $K$  (qui contiennent toutes les deux un log).

Il est intéressant de remarquer que si on a un sens de propagation de l'onde vers les  $z$  positifs, on a grosso-modo  $\Phi(\varphi) = Ke^{iv\varphi}$  et  $f(\rho, \varphi, z, t) = CR(\rho)e^{ickt} Z(z)e^{iv\varphi} = Cu_1u_2$  où  $u_1$  et  $u_2$  sont deux complexes. Il doit être alors particulièrement intéressant de passer par les quaternions ou le hypercomplexes pour exprimer les solutions de manière plus générale (mais peut-être est-ce ce qui se passe lorsqu'on utilise les matrices de Pauli en mécanique quantique).

#### 1-f : L'équation des ondes en coordonnées sphériques

La solution pour le cylindre donne également la méthode de résolution pour la sphère de centre O ou pour un cône de sommet O. L'équation des ondes s'écrit dans ce cas (après résolution de la question du temps de la même manière) :

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \rho^2} + \frac{2}{\rho} \frac{\partial F}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \frac{\partial F}{\partial \theta} + \frac{1}{\rho^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} + k^2 F = 0.$$

On cherche une solution de la forme  $F(\rho, \theta, \varphi) = R(\rho)\Theta(\theta)\Phi(\varphi)$ , ce qui donne après remplacement, multiplication par  $\rho^2$  et division par  $R\Theta\Phi$  :

$$(1.f.1) \quad \frac{1}{R} \left[ \rho^2 \frac{d^2 R}{d\rho^2} + 2\rho \frac{dR}{d\rho} \right] + \frac{1}{\Theta} \left[ \frac{d^2 \Theta}{d\theta^2} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \frac{d\Theta}{d\theta} \right] + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} + k^2 \rho^2 = 0.$$

Les termes en  $R$  et  $\rho$  doivent donner une constante puisque ni  $\theta$  ni  $\varphi$  n'apparaissent dedans :

$$\frac{1}{R} \left[ \rho^2 \frac{d^2 R}{d\rho^2} + 2\rho \frac{dR}{d\rho} \right] + k^2 \rho^2 = \pm v^2, \text{ soit } R(\rho) = \frac{1}{\sqrt{\rho}} [AJ_v(k\rho) + BY_v(k\rho)] \text{ avec } v = \sqrt{\frac{1}{4} \pm \rho^2}.$$

Bien évidemment si  $\frac{1}{4} - \rho^2 < 0$  on retombe sur des solutions à indice complexe. Dans le cas où  $k = 0$ , la solution est  $R(\rho) = \frac{1}{\sqrt{\rho}} (A\rho^\nu + B\rho^{-\nu})$  et si l'origine  $O$  est dans le domaine de  $R$  il faut éliminer la fonction

$Y$  ainsi que  $\rho^{-\nu}$ , soit prendre  $B = 0$ .

Revenons à (1.f.1) qui s'écrit maintenant

$$\frac{\sin^2 \theta}{\Theta} \left[ \frac{d^2 \Theta}{d\theta^2} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \frac{d\Theta}{d\theta} \right] \pm \rho^2 \sin^2 \theta + \frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} = 0 ;$$

même raisonnement que d'habitude d'où l'on sort  $\frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} = \pm \mu^2$ , soit  $\Phi_+(\varphi) = A \cos \mu\varphi + B \sin \mu\varphi$  et

$\Phi_-(\varphi) = A \cosh \mu\varphi + B \sinh \mu\varphi$ . Ce dernier cas pose encore le même problème qu'en cylindriques, la solution n'étant ni périodique ni pseudo-périodique (dans le sens où même si  $\mu$  n'est pas entier, la solution passera assez près d'une solution avec  $\mu$  entier). Notons alors  $\mu = m$  entier.

Le terme restant devient

$$\frac{\sin^2 \theta}{\Theta} \left[ \frac{d^2 \Theta}{d\theta^2} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \frac{d\Theta}{d\theta} \right] \pm \rho^2 \sin^2 \theta \pm m^2 = 0 \Leftrightarrow \frac{d^2 \Theta}{d\theta^2} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \frac{d\Theta}{d\theta} + \left( \pm \rho^2 \pm \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right) \Theta = 0 .$$

Les solutions dans ce cas font appel aux fonctions de Legendre (ceci fera l'objet d'un texte ultérieur...) à condition que  $\rho^2 = n(n+1)$  où  $n$  est entier. Le lecteur intéressé pourra consulter à ce propos

<http://www.chez.com/touslescours/math/cours/opdiff/node1.html>

On peut manipuler ainsi divers systèmes de coordonnées comme le cylindre elliptique, l'ellipsoïde de révolution allongé, etc. La bibliographie fournit quelques références.

#### 1-g : Retour à l'équation du fil

Si on compare l'équation obtenue  $y'' + \frac{1}{x}y' + \frac{k}{x}y = 0$  avec l'équation (1.d.3), on voit qu'il faut prendre  $a = 1, b = k, c = 0, p = -1$ .

On a alors  $y = x^0 Z_0 \left( 2\sqrt{kx^{\frac{1}{2}}} \right)$ , soit avec  $k = \frac{\omega^2}{g}$ ,  $\varphi(x) = Z_0 \left( 2\omega\sqrt{\frac{x}{g}} \right) = AJ_0 \left( 2\omega\sqrt{\frac{x}{g}} \right) + BY_0 \left( 2\omega\sqrt{\frac{x}{g}} \right)$  (notez

le retour du  $\omega\sqrt{\frac{l}{g}}$  obtenu pour le pendule...). Pour  $x = 0$  on doit avoir des valeurs finies de  $\varphi$ , ce qui

interdit de garder  $Y_0$ , il reste simplement  $\varphi(x) = AJ_0 \left( 2\omega\sqrt{\frac{x}{g}} \right)$  d'où comme la solution générale était de la

forme  $u(x, t) = \varphi(x)e^{i\omega t}$ , la solution

$$u(x, t) = Ae^{i\omega t} J_0 \left( 2\omega\sqrt{\frac{x}{g}} \right) .$$

Par ailleurs pour  $x = l$  on doit avoir  $y = 0$ , le nombre  $\alpha_p = 2\omega\sqrt{\frac{l}{g}}$  est donc un des zéros de  $J_0$ , nous avons

alors  $\omega = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{l}}\alpha_p$  et comme ces zéros sont en quantité infinie et tous différents il y a un nombre infini de modes de vibration.

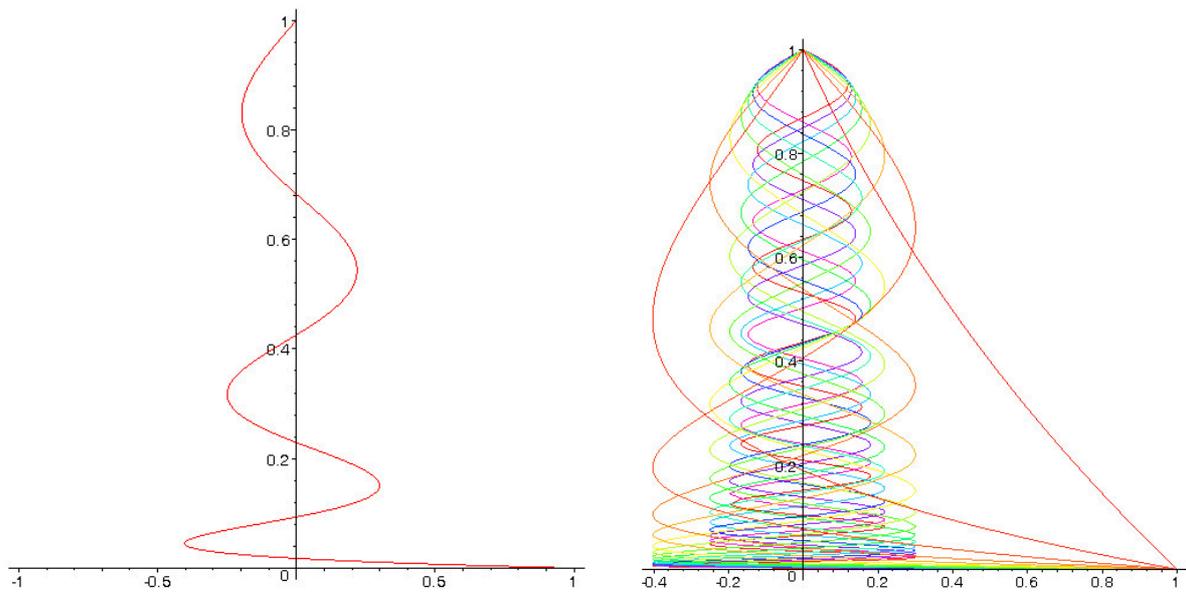


fig. 4 : solutions de l'équation du fil pesant  
 (animation : [http://promenadesmaths.free.fr/Bessel/Bessel\\_fil.htm](http://promenadesmaths.free.fr/Bessel/Bessel_fil.htm))

## 2. Le point de vue complexe

### 2-a : Fonction génératrice

Considérons les deux fonctions  $g(z) = e^{\frac{u}{2}z} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u^n}{2^n n!} z^n$  et  $h(z) = e^{-\frac{u}{2}z} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-u)^n}{2^n n!} \frac{1}{z^n}$  où  $u$  est un paramètre complexe.  $g$  est holomorphe partout alors que  $h$  a une singularité essentielle en 0. Faisons le produit  $f(z) = g(z)h(z)$  sur  $\mathbb{C}^*$  : le terme de rang  $n$  vaut alors

$$k_n(z) = \sum_{m=0}^n \frac{u^m}{2^m m!} z^m \frac{(-1)^{n-m} u^{n-m}}{2^{n-m} (n-m)!} \frac{1}{z^{n-m}} = \sum_{m=0}^n \frac{(-1)^{n-m} u^n}{2^n m! (n-m)!} z^{2m-n} = \left(\frac{-u}{2}\right)^n \sum_{m=0}^n \frac{(-1)^{-m}}{m! (n-m)!} z^{2m-n}.$$

D'un autre côté nous pouvons chercher  $f$  sous forme de série de Laurent :  $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} w_n(u) z^n$  en utilisant la

méthode des résidus. On a alors  $w_n(u) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} e^{\frac{u}{2}\left(z-\frac{1}{z}\right)} \frac{dz}{z^{n+1}}$  où  $\gamma$  est le cercle unité. Ecrivons tout d'abord

que  $\frac{1}{z^{n+1}} e^{\frac{u}{2}\left(z-\frac{1}{z}\right)} = e^{\frac{uz}{2}} e^{-\frac{u}{2z}} = \frac{1}{z^{n+1}} e^{\frac{uz}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \left(\frac{u}{2z}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \left(\frac{u}{2}\right)^k \frac{1}{z^{n+k+1}} e^{\frac{uz}{2}}$  ; cette série converge normalement dans toute couronne de rayon compris entre 0 et l'infini, on peut intégrer terme à terme :

$$w_n(u) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \left(\frac{u}{2}\right)^k \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{e^{\frac{uz}{2}}}{z^{n+k+1}} dz.$$

Le calcul de l'intégrale se fait en utilisant la formule de Cauchy :  $f^{(p)}(z) = \frac{p!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w-z)^{p+1}} dw$ , ce qui donne ici

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{e^{\frac{uz}{2}}}{z^{n+k+1}} dz = \frac{1}{(n+k)!} \left( e^{\frac{uz}{2}} \right) \Big|_{z=0}^{(n+k)} = \frac{1}{(n+k)!} \left(\frac{u}{2}\right)^{n+k}.$$

On a donc  $w_n(u) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(n+k)!} \left(\frac{u}{2}\right)^{n+2k}$  où nous retrouvons nos fonctions de Bessel avec  $\nu = n$  ; on a alors

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(n+k)!} \left(\frac{u}{2}\right)^{n+2k} \right) z^n = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(u) z^n,$$

ce qui montre que  $f$  est la fonction génératrice des fonctions de Bessel d'indice entier.

### 2-b : Représentation par une intégrale de Cauchy

On sait que dans le cas d'une série de Laurent, si on a  $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^n$  dans la couronne

$B = \{z / r_1 < |z - z_0| < r_2\}$  alors  $a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$  où  $\gamma$  est un chemin fermé contenant  $z_0$  à l'intérieur de  $B$ . Nous utilisons donc ceci avec  $J_n$  :

$$(2.b.1) \quad J_n(u) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{e^{\frac{u}{2}\left(\frac{z-1}{z}\right)}}{z^{n+1}} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} e^{\frac{u}{2}(e^{it}-e^{-it})} e^{-(n+1)it} i e^{it} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{iusint} e^{-nit} dt$$

(on a pris comme chemin  $\gamma$  le cercle unité, d'où  $z = e^{it}$ ,  $0 \leq t < 2\pi$  et  $\frac{dz}{dt} = ie^{it}$ ; cette formule est très importante).

On peut prendre aussi bien  $-\pi \leq t < \pi$  ce qui ne change rien et donne  $J_n(u) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{iusint} e^{-nit} dt$  qui en changeant  $n$  en  $-n$  donne  $J_{-n}(u) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{iusint} e^{nit} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-iusint} e^{-nit} dt = J_n(-u)$  après le changement de variable de  $t$  en  $-t$ .

Travaillons un peu plus sur la formule de base :

$$\begin{aligned} J_n(u) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{iusint} e^{-nit} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} e^{iusint} e^{-nit} dt + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^0 e^{iusint} e^{-nit} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} e^{iusint} e^{-nit} dt + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} e^{-iusint} e^{nit} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} e^{iusint} e^{-nit} + e^{-iusint} e^{nit} dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(usint - nt) dt. \end{aligned}$$

Formule fondamentale obtenue en 1824 par Wilhelm Bessel himself. La formule s'étend au cas d'un indice non entier en choisissant un contour d'intégration plus compliqué et qui donne <sup>1</sup> :

$$(2.b.2) \quad J_\nu(u) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(usint - \nu t) dt - \frac{\sin \nu\pi}{\pi} \int_0^{+\infty} e^{-\nu t - u \sinh t} dt \text{ lorsque } \operatorname{Re}(u) > 0.$$

Deux cas particuliers :

$$(2.b.3) \quad n = 0 : J_0(u) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{iu \cos t} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{iu \cos t} dt ;$$

$$(2.b.4) \quad n = 1 : J_1(u) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{iu \sin t - it} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{iu \cos t - it} dt .$$

Pour les autres fonctions :

$$Y_\nu(u) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(usint - \nu t) dt - \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} (e^{\nu t} + (-1)^\nu e^{-\nu t}) e^{-u \sinh t} dt = \frac{-2\left(\frac{u}{2}\right)^{-\nu}}{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{1}{2} - \nu\right)} \int_1^{\infty} \frac{\cos(ut)}{(t^2 - 1)^{\nu + \frac{1}{2}}} dt ,$$

$$I_\nu(u) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} e^{u\left(t + \frac{1}{t}\right)} t^{-\nu-1} dt ,$$

$I_\nu(u) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} e^{u \cos t} \cos(\nu t) dt - \frac{\sin(\nu\pi)}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-u \cosh t - \nu t} dt$ , ce qui donne  $I_n(u) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} e^{u \cos t} \cos(nt) dt$  lorsque  $\nu$  est un entier.

$$K_\nu(u) = \frac{\Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right)(2u)^\nu}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{\cos t}{(t^2 + u^2)^{\nu + \frac{1}{2}}} dt \text{ et particulièrement } K_0(u) = \int_0^{\infty} \cos(u \sinh t) dt = \int_0^{\infty} \frac{\cos(ut)}{\sqrt{t^2 + 1}} dt .$$

On a également  $J_\nu(u) = \frac{(u/2)^\nu}{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right)} \int_{-1}^{+1} e^{iut} (1-t^2)^{\nu - \frac{1}{2}} dt$  d'où lorsque  $\operatorname{Re}(z) > 0$ ,

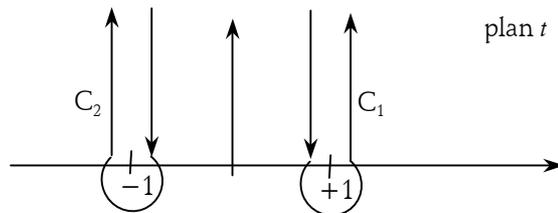
<sup>1</sup> Voir G. N. Watson, *A modern course of analysis*, p 362.

$$(2.b.5) \quad H_\nu^{(m)}(u) = \frac{(u/2)^\nu \Gamma\left(\frac{1}{2} - \nu\right)}{\pi i \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int_{C_m} e^{iut} (t^2 - 1)^{\nu - \frac{1}{2}} dt, \quad m = 1, 2,$$

soit avec  $\Gamma(1/2 - \nu)\Gamma(1/2 + \nu) = \pi / \cos \nu\pi$

$$(2.b.6) \quad H_\nu^{(m)}(u) = \frac{(u/2)^\nu}{i \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right) \cos \nu\pi} \int_{C_m} e^{iut} (t^2 - 1)^{\nu - \frac{1}{2}} dt, \quad m = 1, 2$$

où les trajets  $C_1$  et  $C_2$  sont représentés ci-dessous :



De même on obtient

$$(2.b.7) \quad \int_0^\pi \sin^{n-2} \theta e^{ir\rho \cos \theta} d\theta = 2^{\frac{1}{2}n-1} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}n - \frac{1}{2}\right) \frac{J_{\frac{1}{2}n-1}(r\rho)}{(r\rho)^{\frac{1}{2}n-1}}$$

$$(2.b.8) \quad \int_0^\infty J_\nu(ax) J_{\nu+1}(x) dx = \begin{cases} a^\nu & 0 < a < 1 \\ \frac{1}{2} & a = 1 \\ 0 & a > 1 \end{cases}$$

### 2-c : Formule d'addition

Posons  $u = v + w$  dans  $f(z) = e^{\frac{u}{2}\left(\frac{z-1}{z}\right)} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(u) z^n$ , nous obtenons

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(v+w) z^n = e^{\frac{v}{2}\left(\frac{z-1}{z}\right)} e^{\frac{w}{2}\left(\frac{z-1}{z}\right)} = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} J_p(v) z^p \sum_{q=-\infty}^{+\infty} J_q(w) z^q = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left( \sum_{p+q=n} J_p(v) J_q(w) \right) z^n,$$

soit

$$J_n(v+w) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} J_p(v) J_{n-p}(w).$$

En utilisant  $J_{-n}(z) = (-1)^n J_n(z)$  on peut n'avoir que des indices positifs. Par exemple pour  $n = 0$  :

$$J_0(v+w) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} J_p(v) J_{-p}(w) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} (-1)^p J_p(v) J_p(w) = J_0(v) J_0(w) + 2 \sum_{p=1}^{+\infty} (-1)^p J_p(v) J_p(w);$$

pour  $n = 1$  :

$$\begin{aligned}
J_1(v+w) &= \sum_{p=-\infty}^{+\infty} J_p(v)J_{1-p}(w) = \sum_{p=-\infty}^{-1} (-1)^{-p} J_{-p}(v)J_{1-p}(w) + J_0(v)J_1(w) + \sum_{p=1}^{+\infty} (-1)^{p-1} J_p(v)J_{p-1}(w) + \\
&= \sum_{p=1}^{+\infty} (-1)^p J_p(v)J_{p+1}(w) + J_0(v)J_1(w) + \sum_{p=1}^{+\infty} (-1)^{p-1} J_p(v)J_{p-1}(w) \\
&= \sum_{p=1}^{+\infty} (-1)^p [ J_p(v)J_{p+1}(w) + J_{p+1}(v)J_p(w) ].
\end{aligned}$$

etc.

La formule générale est alors

$$J_n(v+w) = \sum_{p=0}^n J_p(v)J_{n-p}(w) + \sum_{p=1}^{+\infty} (-1)^p [ J_p(v)J_{p+n}(w) + J_{p+n}(v)J_p(w) ].$$

### 2-d : Formules de récurrence

Reprenons une nouvelle fois notre fonction génératrice :  $f(u, z) = e^{\frac{u}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right)} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(u)z^n$  et dérivons par rapport à  $z$  :

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dz}f(u, z) &= \frac{u}{2} \left(1 + \frac{1}{z^2}\right) e^{\frac{u}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right)} = \frac{u}{2} \left(1 + \frac{1}{z^2}\right) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(u)z^n = \frac{u}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(u)z^n + \frac{u}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(u)z^{n-2} \\
&= \frac{u}{2} \left[ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_{n-1}(u)z^{n-1} + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_{n+1}(u)z^{n-1} \right] = \frac{u}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (J_{n-1}(u) + J_{n+1}(u))z^{n-1},
\end{aligned}$$

par ailleurs on a

$$\frac{d}{dz}f(u, z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} nJ_n(u)z^{n-1} \text{ d'où par identification des coefficients :}$$

$$nJ_n(u) = \frac{u}{2} (J_{n-1}(u) + J_{n+1}(u)) \Leftrightarrow \frac{2nJ_n(u)}{u} = J_{n-1}(u) + J_{n+1}(u).$$

On recommence mais en dérivant par rapport à  $u$  cette fois :

$$\begin{aligned}
\frac{d}{du}f(u, z) &= \frac{1}{2} \left(z - \frac{1}{z}\right) e^{\frac{u}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{2} \left(z - \frac{1}{z}\right) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(u)z^n \\
&= \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(u)z^{n+1} - \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(u)z^{n-1} = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (J_{n-1}(u) - J_{n+1}(u))z^n,
\end{aligned}$$

$$\text{et } \frac{d}{du}f(u, z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J'_n(u)z^{n-1} \text{ d'où finalement}$$

$$J'_n(u) = \frac{1}{2} (J_{n-1}(u) - J_{n+1}(u)).$$

En ajoutant et en soustrayant les deux relations obtenues, on a

$$\begin{cases} J_{n-1}(u) = \frac{n}{u} (J_n(u) + J'_n(u)) \Leftrightarrow J_n(u) = \frac{n+1}{u} (J_{n+1}(u) + J'_{n+1}(u)) \\ J_{n+1}(u) = \frac{n}{u} (J_n(u) - J'_n(u)) \Rightarrow J'_{n+1}(u) = -\frac{n}{u^2} (J_n(u) - J'_n(u)) + \frac{n}{u} (J'_n(u) - J''_n(u)) \end{cases}$$

d'où après quelques manipulations :  $J''_n(u) + \frac{1}{u} J'_n(u) + \left(1 - \frac{n^2}{u^2}\right) J_n(u) = 0$ , et nous retrouvons ainsi notre équation préférée...

On peut également obtenir  $\frac{2nJ_n(u)}{u} = J_{n-1}(u) + J_{n+1}(u) \Leftrightarrow J_{n-1}(u) = \frac{2n}{u} J_n(u) - J_{n+1}(u)$  d'où

$$(2.d.1) \quad J'_n(u) = \frac{1}{2} \left( \frac{2n}{u} J_n(u) - J_{n+1}(u) - J_{n-1}(u) \right) = \frac{n}{u} J_n(u) - J_{n+1}(u) \Leftrightarrow J'_n(u) = -\frac{n}{u} J_n(u) + J_{n-1}(u).$$

Dans le cas particulier où  $n = 0$  on obtient  $J'_0(u) = -J_1(u)$ .

Considérons maintenant les deux équations (1.d.3) correspondant à des paramètres  $a$  et  $b$  :

$$\begin{cases} u^2 \frac{d^2 y}{du^2} + u \frac{dy}{du} + (a^2 u^2 - n^2) y = 0 \\ u^2 \frac{d^2 z}{du^2} + u \frac{dz}{du} + (a^2 u^2 - n^2) z = 0 \end{cases};$$

multiplions la première par  $\frac{z}{u}$  et la deuxième par  $\frac{y}{u}$  puis soustrayons les deux :

$$\begin{cases} zu \frac{d^2 y}{du^2} + z \frac{dy}{du} + (a^2 u^2 - n^2) \frac{zy}{u} = 0 \\ yu \frac{d^2 z}{du^2} + y \frac{dz}{du} + (b^2 u^2 - n^2) \frac{zy}{u} = 0 \end{cases} \Rightarrow u \left( z \frac{d^2 y}{du^2} - y \frac{d^2 z}{du^2} \right) + \left( z \frac{dy}{du} - y \frac{dz}{du} \right) = uyz (b^2 - a^2).$$

En fait le premier terme est la dérivée par rapport à  $u$  du produit  $u \left( z \frac{dy}{du} - y \frac{dz}{du} \right)$ , nous allons donc intégrer cette relation en remplaçant  $y$  et  $z$  par les fonctions de Bessel solutions, à savoir  $J_n(au)$  et  $J_n(bu)$  :

$$(b^2 - a^2) \int_0^u u J_n(au) J_n(bu) du = u \left[ \frac{dJ_n(au)}{du} J_n(bu) - \frac{dJ_n(bu)}{du} J_n(au) \right] = u [a J'_n(au) J_n(bu) - b J'_n(bu) J_n(au)].$$

Utilisons les formules obtenues précédemment :  $\begin{cases} J'_n(au) = \frac{n}{au} J_n(au) - J_{n+1}(au) \\ J'_n(bu) = \frac{n}{bu} J_n(bu) - J_{n+1}(bu) \end{cases}$ , ce qui nous donne

$$(2.d.2) \quad \int_0^u u J_n(au) J_n(bu) du = \frac{u}{b^2 - a^2} [b J_{n+1}(bu) J_n(au) - a J_{n+1}(au) J_n(bu)],$$

ou encore en utilisant l'autre relation pour  $J'$  :

$$(2.d.3) \quad \int_0^u u J_n(au) J_n(bu) du = \frac{u}{b^2 - a^2} [a J_{n-1}(au) J_n(bu) - b J_{n-1}(bu) J_n(au)].$$

Dans les deux cas ces deux formules sont incorrectes si  $a = b$ . On calcule donc directement avec un changement de variable et une intégration par parties :

$$\int_0^u u J_n^2(au) du = \frac{1}{a^2} \int_0^{au} u J_n^2(u) du = \frac{u^2}{2} J_n^2(au) - \frac{1}{a^2} \int_0^{au} u^2 J_n(u) J'_n(u) du ;$$

or  $J_n(u)$  satisfait l'équation (1.d.3) avec  $a = 1$  d'où  $u^2 J''_n(u) + u J'_n(u) + (u^2 - n^2) J_n(u) = 0$ , soit en multipliant par  $J'_n(u)$  et en isolant ce qui nous intéresse :  $u^2 J'_n(u) J''_n(u) + u [J'_n(u)]^2 - n^2 J'_n(u) J_n(u) = -u^2 J'_n(u) J_n(u)$  ; remplaçons dans l'intégrale restante :

$$-\int_0^{au} u^2 J_n(u) J'_n(u) du = \int_0^{au} u^2 J'_n(u) J''_n(u) du + u [J'_n(u)]^2 - n^2 J'_n(u) J_n(u) du.$$

A tout hasard dérivons  $u^2 [J'_n(u)]^2$  :  $\frac{d(u^2 [J'_n(u)]^2)}{du} = 2u [J'_n(u)]^2 + 2u^2 J'_n(u) J''_n(u)$ , ce qui nous donne une primitive des deux premiers termes. Le dernier terme est évident, il nous reste donc

$$-\frac{1}{a^2} \int_0^{au} u^2 J_n(u) J'_n(u) du = \frac{1}{2} \left( u^2 [J'_n(au)]^2 - \frac{n^2}{a^2} [J_n(au)]^2 \right).$$

Finalement on a

$$\int_0^u u J_n^2(au) du = \frac{u^2}{2} J_n^2(au) + \frac{1}{2} \left( u^2 [J'_n(au)]^2 - \frac{n^2}{a^2} [J_n(au)]^2 \right) = \frac{1}{2} u^2 \left( [J'_n(au)]^2 + \left( 1 - \frac{n^2}{a^2 u^2} \right) [J_n(au)]^2 \right).$$

Ces diverses intégrales sont appelées intégrales de *Lommel*.

### 3. Comportement asymptotique

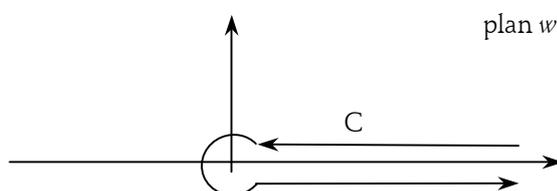
Partons de (2.b.6) où nous posons  $t = 1 + iw$ , par exemple dans  $H_\nu^{(1)}$  :

$$H_\nu^{(m)}(u) = \frac{(u/2)^\nu}{i\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right)\cos\nu\pi} \int_{C_m} e^{iut} (t^2 - 1)^{\nu - \frac{1}{2}} dt, m = 1, 2$$

devient

$$(3.a.1) \quad H_\nu^{(1)}(u) = \frac{(u/2)^\nu e^{i\left[u + \nu\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right]}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right)\cos\nu\pi} \int_C e^{-uw} (2w + iw^2)^{\nu - \frac{1}{2}} dw$$

où C est la déformation du contour  $C_1$  par  $w = \frac{1}{i}(t-1)$ , soit le contour C ci-dessous.



La fonction à intégrer présente deux points de branchement, en  $w = 0$  et  $w = -\frac{i}{2} = 2i$ . Pour  $\text{Re}(uw) > 0$  et  $\text{Re}(\nu) > -1/2$  l'intégrale dans (3.a.1) est convergente et nous pouvons la décomposer en trois parties : sur le trajet  $(+\infty, \varepsilon)$ , sur le cercle (c) de centre O de rayon  $\varepsilon$  et sur le trajet  $(\varepsilon, +\infty)$ .

Lorsque  $\varepsilon$  tend vers 0, l'intégrale sur (c) tend évidemment vers 0 et sur les deux demi-droites les intégrales sont identiques au(x) signe(s) près. On a alors

$$(3.a.2) \quad H_\nu^{(1)}(u) = \frac{2(u/2)^\nu e^{i\left[u - \nu\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right]}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right)} \int_0^{+\infty} e^{-uw} (2w + iw^2)^{\nu - \frac{1}{2}} dw.$$

L'intégrale est la transformée de Laplace de  $F(w) = (2w + iw^2)^{\nu - \frac{1}{2}}$  et grâce au lemme de Watson vu au chapitre sur la fonction Gamma nous pouvons obtenir le développement asymptotique de H.

Développons donc en série le terme

$$F(w) = (2w + iw^2)^{\nu - \frac{1}{2}} = (2w)^{\nu - \frac{1}{2}} \left[1 + \frac{iw}{2}\right]^{\nu - \frac{1}{2}} = (2w)^{\nu - \frac{1}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\nu - \frac{1}{2}}{k} \left(\frac{iw}{2}\right)^k$$

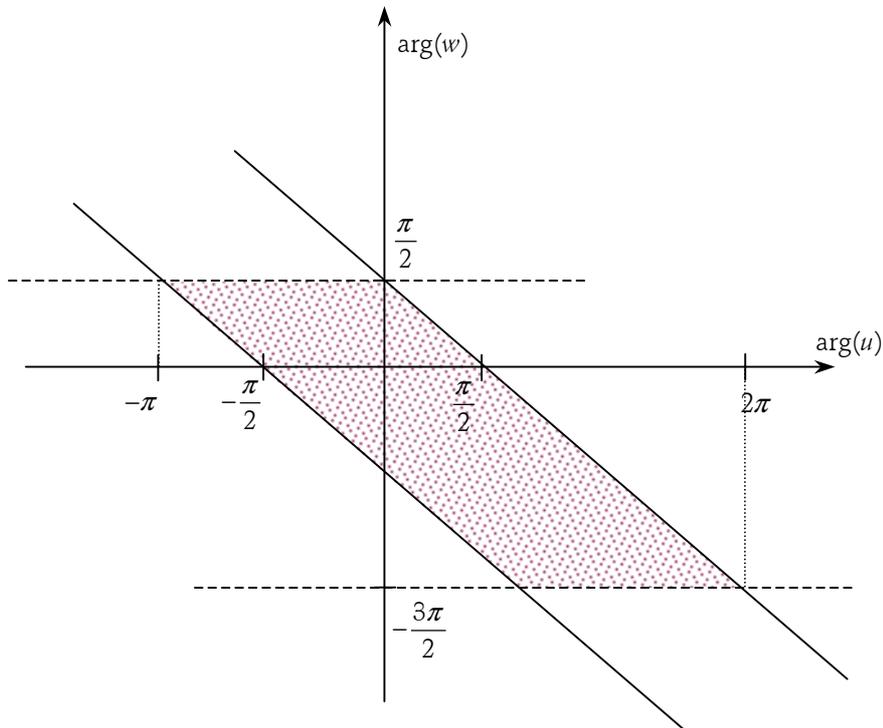
et intégrons terme à terme :

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-wu} F(w) dw &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\nu - \frac{1}{2}}{k} \int_0^{\infty} e^{-wu} (2w)^{\nu - \frac{1}{2}} \left(\frac{iw}{2}\right)^k dw \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\nu - \frac{1}{2}}{k} 2^{\nu - \frac{1}{2} - k} i^k \int_0^{\infty} e^{-wu} w^{\nu - \frac{1}{2} + k} dw = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\nu - \frac{1}{2}}{k} 2^{\nu - \frac{1}{2} - k} i^k \Gamma\left(\nu - \frac{1}{2} + k\right) \frac{1}{u^{\nu + \frac{1}{2} + k}} \end{aligned}$$

soit après simplifications diverses :

$$(3.a.3) \quad H_\nu^{(1)}(u) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi u}} e^{i\left[u - \nu\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right]} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(\nu + k + \frac{1}{2}\right)}{k! \Gamma\left(\nu - k + \frac{1}{2}\right)} \left(\frac{i}{2u}\right)^k.$$

La condition imposée  $\operatorname{Re}(uw) > 0$  et le fait qu'il y ait un point de branchement en  $2i$  pour  $F(w) = (2w + iw^2)^{\nu - \frac{1}{2}}$  amène à intégrer seulement sur un arc de cercle évitant le demi-axe imaginaire positif, soit une coupure le long de cet axe ; on peut prendre par exemple  $-\frac{3\pi}{2} < \arg w < \frac{\pi}{2}$  et  $\operatorname{Re}(uw) > 0$ , ce qui est équivalent à  $\cos(\arg u + \arg w) > 0 \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} < \arg u + \arg w < \frac{\pi}{2}$ . Ceci se représente dans un plan dont les axes portent  $\arg(u)$  et  $\arg(w)$  :



La zone hachurée correspond à l'inégalité précédente et on voit que l'on peut se satisfaire de  $-\pi < \arg(u) < 2\pi$ . Le même raisonnement s'applique à  $H_\nu^{(2)}$  en remplaçant  $i$  par  $-i$ , ce qui donne

$$H_\nu^{(2)}(u) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi u}} e^{-i\left[u - \nu\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right]} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(\nu + k + \frac{1}{2}\right)}{k! \Gamma\left(\nu - k + \frac{1}{2}\right)} \left(\frac{-i}{2u}\right)^k \quad \text{avec } -2\pi < \arg(u) < \pi.$$

Comme  $J_\nu(u) = \frac{1}{2} \left( H_\nu^{(1)}(u) + H_\nu^{(2)}(u) \right)$ , on a avec quelques manipulations « élémentaires » :

$$\begin{aligned}
(3.a.4) \quad J_\nu(u) &\sim \sqrt{\frac{2}{\pi u}} \cos\left(u - \nu \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \Gamma\left(\nu + 2k + \frac{1}{2}\right)}{(2k)! \Gamma\left(\nu - 2k + \frac{1}{2}\right)} \left(\frac{1}{2u}\right)^{2k} \\
&\quad - \sqrt{\frac{2}{\pi u}} \sin\left(u - \nu \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \Gamma\left(\nu + 2k + \frac{3}{2}\right)}{(2k+1)! \Gamma\left(\nu - 2k - \frac{1}{2}\right)} \left(\frac{1}{2u}\right)^{2k+1}
\end{aligned}$$

avec  $-\pi < \arg(u) < \pi$ . Particulièrement si on ne garde que les premiers termes :

$$(3.a.5) \quad J_\nu(u) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi u}} \cos\left(u - \nu \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{2u} \sqrt{\frac{2}{\pi u}} \sin\left(u - \nu \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \left(\nu^2 - \frac{1}{4}\right).$$

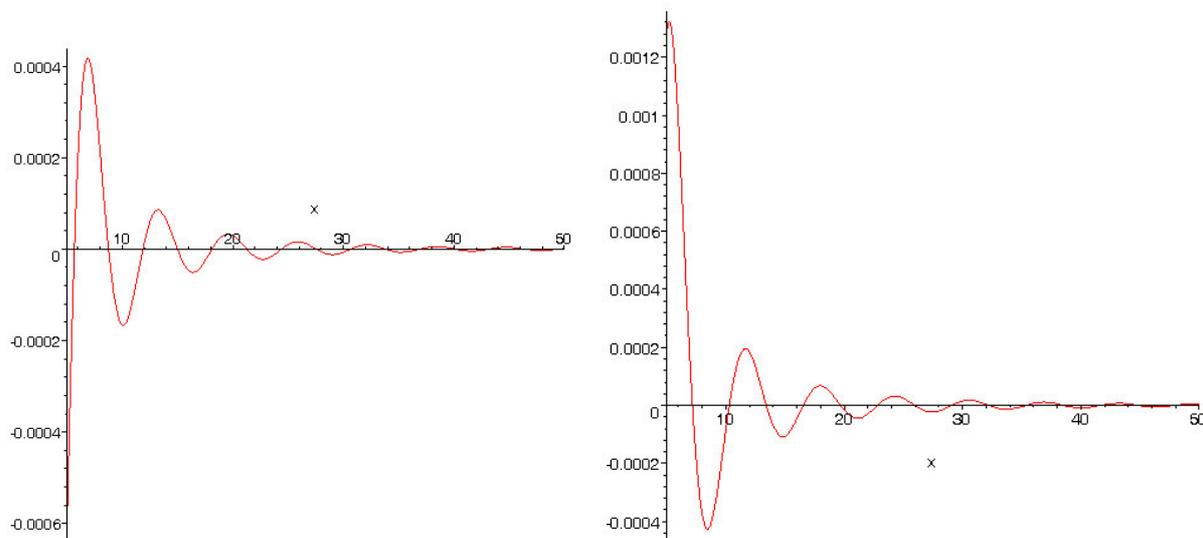


fig. 5 : Représentations de la différence entre  $J_0, J_1$  et leur développement asymptotique ( $k = 0$ ).

Le lecteur pourra remarquer que les zéros de  $J$  sont quasiment les solutions d'équations du type  $\tan x = \alpha x$ , que l'on trouve très fréquemment en Physique.

Pour obtenir le même type de résultat sur des domaines différents, il suffit de faire tourner  $u$  de  $2\pi m$ ,  $m$  entier, et d'utiliser la relation  $J_\nu(e^{2i\pi m} u) = e^{2i\pi m} J_\nu(u) \Leftrightarrow J_\nu(u) = e^{-2i\pi m} J_\nu(e^{2i\pi m} u)$ . Le remplacement de  $u$  par  $e^{2i\pi m} u$  ne change rien sauf pour  $\sqrt{\frac{2}{\pi u}}$  qui devient  $\sqrt{\frac{2}{\pi e^{2i\pi m} u}} = e^{-i\pi m} \sqrt{\frac{2}{\pi u}} = (-1)^m \sqrt{\frac{2}{\pi u}}$  et pour  $-\pi < \arg(u) < \pi$  qui devient  $-\pi < 2m\pi + \arg(u) < \pi \Leftrightarrow \pi(-1 - 2m) < \arg(u) < (1 - 2m)\pi$ .

Le changement de signe à chaque fois que  $u$  fait un tour introduit une série de discontinuités dans les développements asymptotiques appelés *phénomène de Stokes* ; voici ce qu'en dit Watson :

« The fact that the constants involved in the asymptotic expansion of the analytic function  $J_\nu(z)$  are discontinuous was discovered by Stokes in (March ?) 1857, and the discovery was apparently one of those which are made at three o'clock in the morning. »

Les résultats donnant  $H_\nu^{(j)}$  permettent d'obtenir les développements des autres fonctions : par exemple

$$Y_\nu(u) = \frac{1}{2i} \left( H_\nu^{(1)}(u) - H_\nu^{(2)}(u) \right) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi u}} \sin\left(u - \nu \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right).$$

## 4. Zéros des fonctions de Bessel

### 4-a : Propriétés de base

Un certain nombre de théorèmes sur les solutions d'équations différentielles du deuxième ordre permettent de dire que les solutions de l'équation (1.d.3) ne peut avoir que des zéros simples (sauf pour  $z = 0$ ,  $\nu > 1$ ). Par ailleurs deux solutions linéairement indépendantes ne peuvent avoir de zéros communs et ces zéros sont entrelacés. Ceci dit on peut dire davantage de choses sur la question...

Tout d'abord **ces zéros sont tous réels** si  $\nu$  est réel et  $\nu > -1$  ; en effet s'il existait un zéro ( $z_0$ ) qui soit imaginaire pur alors on aurait :

$$\begin{aligned} J_\nu(iy_0) &= \left(\frac{iy_0}{2}\right)^\nu \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r! \Gamma(\nu+r+1)} \left(\frac{iy_0}{2}\right)^{2r} = \left(\frac{iy_0}{2}\right)^\nu \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r (i)^{2r}}{r! \Gamma(\nu+r+1)} \left(\frac{y_0}{2}\right)^{2r} i^\nu \\ &= \left(\frac{iy_0}{2}\right)^\nu \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r! \Gamma(\nu+r+1)} \left(\frac{y_0}{2}\right)^{2r} ; \end{aligned}$$

cette expression est une somme de termes tous positifs et ne s'annule donc pas.

Vérifions qu'aucun zéro n'est complexe ; supposons que  $z_0$  en soit un (zéro complexe) et reprenons la formule (2.d.2) où nous prenons  $a = z_0$  et  $b = \bar{z}_0$  le conjugué de  $z_0$  :

$$\int_0^u u J_\nu(z_0 u) J_\nu(\bar{z}_0 u) du = \frac{u}{z_0 - \bar{z}_0^2} \left[ \bar{z}_0 J_{\nu+1}(\bar{z}_0 u) J_\nu(z_0 u) - z_0 J_{\nu+1}(z_0 u) J_\nu(\bar{z}_0 u) \right].$$

Lorsque  $u$  est réel,  $J_\nu(u)$  l'est également donc si  $J_\nu(z_0) = 0$  alors  $J_\nu(\bar{z}_0) = 0$

Particulièrement on a  $\int_0^1 u J_\nu(z_0 u) J_\nu(\bar{z}_0 u) du = 0$ , mais  $J_n(z_0 u) J_n(\bar{z}_0 u) = J_n(z_0 u) J_n(\overline{z_0 u}) = J_n(z_0 u) \overline{J_n(z_0 u)} > 0$ , c'est donc impossible.

Deuxième point : **les zéros sont entrelacés** comme on peut le voir sur la fig. 4 ; démontrons d'abord quelques petites formules :

$$(4.a.1) \quad \frac{d}{du} (u^\nu J_\nu(u)) = u^\nu J_{\nu-1}(u) \quad \text{et} \quad \frac{d}{du} (u^{-\nu} J_\nu(u)) = -u^{-\nu} J_{\nu+1}(u).$$

La première s'obtient à partir de (2.d.1) : avec  $u J'_\nu(u) = -\nu J_\nu(u) + u J_{\nu-1}(u)$  on a en multipliant par  $u^{\nu-1}$

$$u^\nu J'_\nu(u) = -\nu u^{\nu-1} J_\nu(u) + u^\nu J_{\nu-1}(u) ;$$

dérivons :

$$\frac{d}{du} (u^\nu J_\nu(u)) = u^\nu J'_\nu(u) + \nu u^{\nu-1} J_\nu(u) \Rightarrow \frac{d}{du} (u^\nu J_\nu(u)) = u^\nu J_{\nu-1}(u) ;$$

on a également en intégrant :

$$(4.a.2) \quad \int_{u_0}^u u^\nu J_{\nu-1}(u) du = u^\nu J_\nu(u) \Big|_{u_0}^u.$$

En tout cas lorsqu'on se place entre deux zéros consécutifs de  $u^\nu J_\nu$  il y a au moins un zéro de  $u^\nu J_{\nu-1}$  puisque la dérivée s'annule au moins une fois.

Pour la deuxième c'est pareil en utilisant l'autre forme de (2.d.1) :  $u J'_\nu(u) = \nu J_\nu(u) - u J_{\nu+1}(u)$  ; on en déduit qu'entre deux zéros consécutifs de  $u^{-\nu} J_\nu$  il y a au moins un zéro de  $u^{-\nu} J_{\nu+1}$  ; enfin en admettant que tous les zéros sont simples (si  $J_\nu(u_0) = 0$  alors  $J'_\nu(u_0) \neq 0$ ), il ne peut y avoir de zéro commun à  $J_\nu$  et  $J_{\nu+1}$ .

Par récurrence il est clair que tous les zéros de toutes les fonctions de Bessel sont entrelacés.

Le problème maintenant est d'obtenir des résultats un peu plus constructifs... Si on utilise Maple on a une fonction  $> \mathbf{BesselZeros}(n, k)$  qui donne la valeur du zéro numéro  $k$  pour  $\nu = n$ . Il est d'ailleurs

intéressant de regarder une représentation des ces zéros pour un certain nombre de valeurs de  $n$  (pas forcément entier).

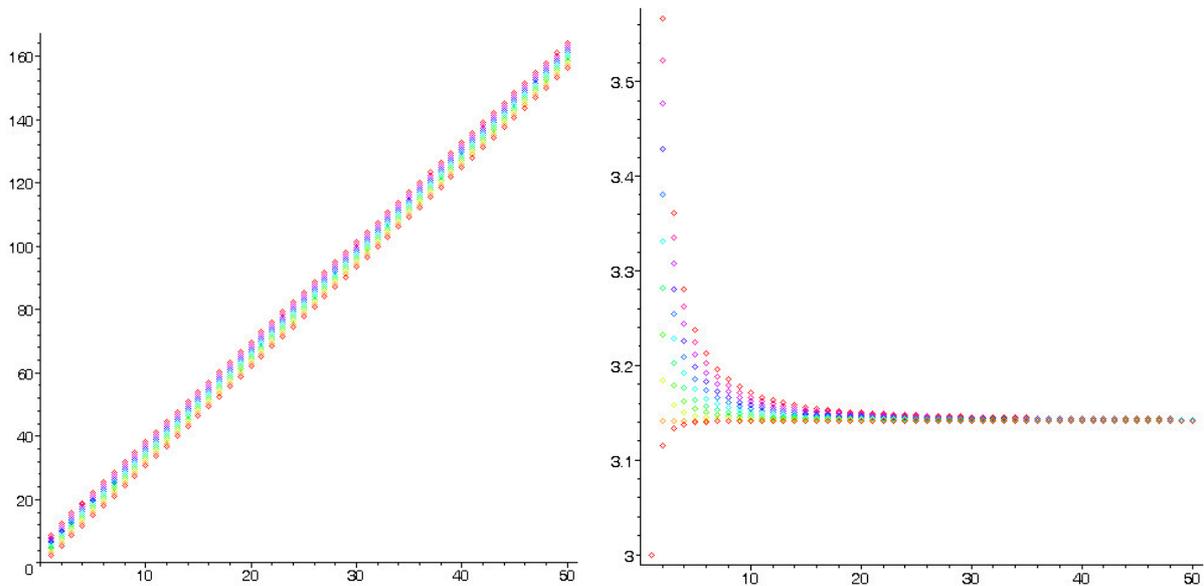


fig. 6 : 50 premiers zéros des fonctions de Bessel (première espèce) et leurs différences,  $0 \leq n \leq 5, 1 \leq k \leq 50$

On voit clairement que mis à part pour les premières valeurs la relation est quasi-linéaire.

Premier théorème valable pour toutes les solutions de (1.d.3) telles que  $\nu$  soit réel et  $\nu^2 > \frac{1}{4}$  ; soient  $\alpha_n$  et  $\alpha_{n+1}$  deux zéros consécutifs d'une solution réelle  $Z(u)$  de (1.d.3), alors

$$\frac{\pi}{\sqrt{1 - \frac{\nu^2 - 1/4}{\alpha_{n+1}^2}}} < \alpha_{n+1} - \alpha_n < \frac{\pi}{\sqrt{1 - \frac{\nu^2 - 1/4}{\alpha_n^2}}}.$$

On voit sur la figure précédente que l'écart tend vers  $\pi$ , ce qui se justifie fort bien à l'aide de cette inégalité dans la mesure où les  $\alpha_n$  tendent vers l'infini.

Posons  $Z = \frac{1}{\sqrt{u}}W$ , alors  $W'' + \left(1 - \frac{\nu^2 - 1/4}{u^2}\right)W = 0$  ; soit  $U$  une solution de  $U'' + \left(1 - \frac{\nu^2 - 1/4}{\alpha_n^2}\right)U = 0$  ; comme

$\alpha_n$  est constant une solution de cette équation pour laquelle  $U(\alpha_n) = 0$  est par exemple de la forme

$U = A \sin(\omega u + B)$  avec  $\omega = \sqrt{1 - \frac{\nu^2 - 1/4}{\alpha_n^2}}$  ; avec  $U(\alpha_n) = 0$  on a  $\sin(\omega \alpha_n + B) = 0 \Rightarrow B = -\omega \alpha_n$  ; on peut

prendre  $A = 1$ , soit la solution  $U = \sin \omega(u - \alpha_n)$ . Appelons  $\beta_{n+1}$  le zéro de  $U$  qui suit  $\alpha_n$  dans l'ordre croissant, on a alors  $\omega \beta_{n+1} = \omega \alpha_n + \pi \Rightarrow \beta_{n+1} = \alpha_n + \frac{\pi}{\omega}$ . Si nous arrivons à montrer que  $\alpha_{n+1} < \beta_{n+1}$  nous aurons la partie droite de l'inégalité.

Supposons donc le contraire :  $\alpha_{n+1} \geq \beta_{n+1}$  et que  $W'(\alpha_n) > 0$  (si c'était le contraire le raisonnement serait le même) :  $W$  est alors positive sur  $]\alpha_n ; \alpha_{n+1}[$  ; maintenant procédons comme au 2-d : on multiplie par  $U$  la

1<sup>ère</sup> équation,  $UW'' + \left(1 - \frac{\nu^2 - 1/4}{u^2}\right)UW = 0$  et par  $W$  la deuxième,  $WU'' + \left(1 - \frac{\nu^2 - 1/4}{\alpha_n^2}\right)WU = 0$ , on soustrait :

$UW'' - U'W' + \left(\nu^2 - \frac{1}{4}\right) \left(\frac{1}{\alpha_n^2} - \frac{1}{u^2}\right) UW = 0$  et on intègre entre  $\alpha_n$  et  $\beta_{n+1}$  :

$$\left(\nu^2 - \frac{1}{4}\right) \int_{\alpha_n}^{\beta_{n+1}} \left(\frac{1}{\alpha_n^2} - \frac{1}{u^2}\right) UW du = -(UW' - WU') \Big|_{\alpha_n}^{\beta_{n+1}} = W(\beta_{n+1})U'(\beta_{n+1}).$$

Or on a pris  $\alpha_{n+1} \geq \beta_{n+1}$  donc le premier membre est positif (si  $U > 0$  entre  $\alpha_n$  et  $\beta_{n+1}$ ,  $U'(\beta_{n+1}) < 0$  et si  $U < 0$ ,  $U'(\beta_{n+1}) < 0$  : faire un petit schéma...). Il est impossible d'avoir des signes différents, conclusion  $\alpha_{n+1} < \beta_{n+1}$ . La démarche est exactement la même pour la partie gauche de l'inégalité en prenant  $\alpha_{n+1}$  à la place de  $\alpha_n$ .

#### 4-b : Fonctions de Bessel comme produit infini

Il est possible d'exprimer  $J_\nu(u)$  comme produit weierstrassien du fait des quelques propriétés vues précédemment. On se place néanmoins dans le cas plus général où les zéros peuvent être complexes, soit lorsque  $\nu$  est complexe. On note  $j_k$  les zéros de partie réelle positive de  $G(u) = u^{-\nu} J_\nu(u)$  rangés par partie réelle réelle croissante (du « plus petit » au « plus grand »). Comme  $u^{-\nu} J_\nu(u)$  est paire, elle a également les zéros  $-j_k$ .

Prenons un large rectangle  $D$  dont les sommets sont aux points  $\pm A \pm iB$  où le « plus grand » zéro est  $-j_m$  à gauche et  $j_m$  à droite.

Considérons maintenant l'intégrale sur le rectangle :  $\int_D \frac{z}{w(w-z)} \frac{J_{\nu+1}(w)}{J_\nu(w)} dw$  où  $z$  est n'importe quel point intérieur au rectangle (sauf les zéros) et  $\nu$  non entier négatif. Les seuls pôles à l'intérieur de  $D$  sont  $z, \pm j_1, \dots, \pm j_m$  ; le résidu au point  $z$  est  $\frac{J_{\nu+1}(z)}{J_\nu(z)}$ , les résidus aux points  $\pm j_1, \dots, \pm j_m$  sont  $\frac{1}{z \mp j_k} \pm \frac{1}{j_k}$  puisque  $J'_\nu(z) = -J_{\nu+1}(z)$  lorsque  $z = \pm j_k$  d'après (2.d.1). On a donc

$$\frac{J_{\nu+1}(z)}{J_\nu(z)} + \sum_{k=1}^m \left( \frac{1}{z - j_k} + \frac{1}{j_k} \right) + \sum_{k=1}^m \left( \frac{1}{z + j_k} - \frac{1}{j_k} \right) = \frac{1}{2\pi i} \int_D \frac{z}{w(w-z)} \frac{J_{\nu+1}(w)}{J_\nu(w)} dw.$$

Si on prend le développement asymptotique de  $J_\nu(u)$ , on montre que  $\frac{J_{\nu+1}(w)}{J_\nu(w)}$  est borné quelles que soient les dimensions de  $D$ , soit que l'intégrale de droite tend vers 0 lorsque  $A$  et  $B$  tendent vers l'infini. On a donc

$$-\frac{J_{\nu+1}(z)}{J_\nu(z)} = \sum_{k=1}^m \left( \frac{1}{z - j_k} + \frac{1}{j_k} \right) + \sum_{k=1}^m \left( \frac{1}{z + j_k} - \frac{1}{j_k} \right).$$

Intégrons :

$$\begin{aligned} -\int_0^z \frac{J_{\nu+1}(t)}{J_\nu(t)} dt &= \sum_{k=1}^m \left( \ln(z - j_k) - \ln(-j_k) + \frac{z}{j_k} \right) + \sum_{k=1}^m \left( \ln(z + j_k) - \ln(j_k) - \frac{z}{j_k} \right) \\ &= \sum_{k=1}^m \ln \left[ \left( 1 - \frac{z}{j_k} \right) e^{\frac{z}{j_k}} \right] + \sum_{k=1}^m \ln \left[ \left( 1 + \frac{z}{j_k} \right) e^{-\frac{z}{j_k}} \right] = \ln \left[ \prod_{k=1}^m \left( 1 - \frac{z^2}{j_k^2} \right) \right]; \end{aligned}$$

par ailleurs on a

$$-\int_0^z \frac{J_{\nu+1}(t)}{J_\nu(t)} dt = \int_0^z \frac{G'(t)}{G(t)} dt = [\ln G(t)]_0^z = \ln \frac{G(z)}{G(0)}.$$

Pour trouver  $G(0)$ , on part de  $u^{-\nu} J_\nu(u) = G(u) = \frac{2^{-\nu}}{\Gamma(\nu+1)} + \dots \Rightarrow G(0) = \frac{2^{-\nu}}{\Gamma(\nu+1)}$  et finalement

$$\frac{z^{-\nu} J_{\nu}(z)}{\Gamma(\nu+1)} = \prod_{k=1}^{\infty} \left( 1 - \frac{z^2}{j_k^2} \right) \Leftrightarrow J_{\nu}(z) = \frac{1}{\Gamma(\nu+1)} \left( \frac{z}{2} \right)^{\nu} \prod_{k=1}^{\infty} \left( 1 - \frac{z^2}{j_k^2} \right).$$

## 5. Transformée de Hankel

### 5-a : Un résultat remarquable

Au même titre que la transformée de Fourier, on définit une transformée à base de fonctions de Bessel permettant l'inversion d'une fonction. Ceci n'a rien de bien étonnant étant donné le lien entre ces fonctions et les polynômes de Legendre, eux-mêmes possédant de bonnes propriétés d'orthogonalité. En mémoire d'un des premiers calculs de ce type on l'a appelée *transformée de Hankel*.

On utilise comme principal outil la propriété (2.d.2) :

$$\int_0^z u J_n(au) J_n(bu) du = \frac{z}{b^2 - a^2} [b J_{n+1}(bz) J_n(az) - a J_{n+1}(az) J_n(bz)].$$

Posons  $H_\nu(a, b) = \int_0^z \sqrt{xu} J_\nu(xu) du \int_a^b \sqrt{yu} J_\nu(yu) f(y) dy$  : nous avons alors

$$\int_0^z \sqrt{xu} J_\nu(xu) du \int_0^\infty \sqrt{yu} J_\nu(yu) f(y) dy = H_\nu(\infty, x + \delta) + H_\nu(x + \delta, x) + H_\nu(x, x - \delta) + H_\nu(x - \delta, 0) ;$$

regardons le comportement de  $H_\nu$  quand  $z$  tend vers l'infini :

$$H_\nu(x - \delta, 0) = \int_0^z \sqrt{xu} J_\nu(xu) du \int_0^{x-\delta} \sqrt{yu} J_\nu(yu) f(y) dy = \sqrt{x} \int_0^{x-\delta} \sqrt{y} f(y) dy \int_0^z u J_\nu(xu) J_\nu(yu) du.$$

La dernière intégrale est réécrite avec (2.d.2) :

$$H_\nu(x - \delta, 0) = z \sqrt{x} \int_0^{x-\delta} \sqrt{y} f(y) \frac{x J_{\nu+1}(xz) J_\nu(yz) - y J_{\nu+1}(yz) J_\nu(xz)}{x^2 - y^2} dy.$$

Or nous savons que lorsque  $u$  est très supérieur à 1,  $J_\nu(u) = \frac{A \cos u - B \sin u}{\sqrt{u}} + o\left(\frac{1}{u\sqrt{u}}\right)$  d'où lorsque  $z$  tend

vers l'infini  $H_\nu(x - \delta, 0) = o(\sqrt{z}) \int_0^{x-\delta} \sqrt{y} f(y) \frac{J_\nu(yz)}{x^2 - y^2} dy - o(\sqrt{z}) \int_0^{x-\delta} \sqrt{y} f(y) \frac{y J_{\nu+1}(yz)}{x^2 - y^2} dy$ .

La première intégrale se décompose en deux blocs ( $\frac{A \cos u - B \sin u}{\sqrt{u}}$  tend alors vers 0 lorsque  $u$  tend vers l'infini) :

$$\int_0^{x-\delta} \sqrt{y} f(y) \frac{J_\nu(yz)}{x^2 - y^2} dy = \int_{1/z}^{x-\delta} \sqrt{y} f(y) \frac{J_\nu(yz)}{x^2 - y^2} dy + \int_0^{1/z} \sqrt{y} f(y) \frac{J_\nu(yz)}{x^2 - y^2} dy,$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} \int_0^{1/z} \sqrt{y} f(y) \frac{J_\nu(yz)}{x^2 - y^2} dy &= o\left[\int_0^{1/z} \sqrt{y} |f(y)| (yz)^y dy\right] = o\left[z^\nu \int_0^{1/z} |f(y)| y^{\nu+\frac{1}{2}} dy\right] \\ &= o\left[\frac{z^\nu}{z^{\nu+1/2}} \int_0^{1/z} |f(y)| dy\right] = o\left(\frac{1}{\sqrt{z}}\right) \end{aligned}$$

si  $\int_0^\infty |f(y)| dy$  est convergente.

Pour l'autre nous avons  $\int_{1/z}^{x-\delta} \sqrt{y} f(y) \frac{J_\nu(yz)}{x^2 - y^2} dy = \frac{1}{\sqrt{z}} \int_{1/z}^{x-\delta} \frac{\sqrt{y} f(y)}{x^2 - y^2} (A \cos(yz) + B \sin(yz)) dy = o\left(\frac{1}{\sqrt{z}}\right)$ . On

voit donc au final que  $H_\nu(x - \delta, 0) = o\left(\frac{1}{\sqrt{z}}\right) \xrightarrow{z \rightarrow \infty} 0$ . On obtient de même que  $H_\nu(\infty, x + \delta) \xrightarrow{z \rightarrow \infty} 0$

sans difficulté ; il reste donc à regarder le comportement de  $H_\nu(x + \delta, x)$  et  $H_\nu(x, x - \delta)$  :

Supposons  $f$  bornée sur  $(x - \delta ; x + \delta)$ , nous allons montrer que

$$H_\nu(x + \delta, x) \xrightarrow{\delta \rightarrow 0, z \rightarrow \infty} \frac{1}{2} f(x+0) \text{ et que } H_\nu(x, x - \delta) \xrightarrow{\delta \rightarrow 0, z \rightarrow \infty} \frac{1}{2} f(x-0).$$

Comme  $f$  est bornée, il en est de même de  $\frac{1}{y^\nu \sqrt{y}} f(y)$  sur  $]x; x + \delta]$ , soit

$$\frac{1}{y^\nu \sqrt{y}} f(y) = \frac{1}{x^\nu \sqrt{x}} f(x+0) + g_1(y) - g_2(y) \text{ où } g_1 \text{ et } g_2 \text{ sont deux fonctions croissantes de } y, \text{ positives et}$$

inférieures à un réel positif  $\varepsilon$  dépendant de  $\delta$ . On remplace dans  $H_\nu$  :

$$\begin{aligned} H_\nu(x + \delta, x) &= x^{-\nu-1/2} f(x+0) \int_0^z J_\nu(xu) du \int_x^{x+\delta} J_\nu(yu) y^{\nu+1} dy \\ &\quad + \sqrt{x} \int_0^z u J_\nu(xu) du \int_x^{x+\delta} J_\nu(yu) y^{\nu+1} g_1(y) dy - \sqrt{x} \int_0^z u J_\nu(xu) du \int_x^{x+\delta} J_\nu(yu) y^{\nu+1} g_2(y) dy \end{aligned}$$

Réutilisons une nouvelle fois (2.d.2) dans le premier terme :

$$\begin{aligned} \dots &= x^{-\nu} f(x+0) \int_0^z J_\nu(xu) \left[ J_{\nu+1}(xu + \delta u) (x + \delta)^{\nu+1} - J_{\nu+1}(xu) x^{\nu+1} \right] du \\ &= x^{-\nu} f(x+0) \left[ (x + \delta)^{\nu+1} \int_0^z J_\nu(xu) J_{\nu+1}(xu + \delta u) du - x^{\nu+1} \int_0^z J_\nu(xu) J_{\nu+1}(xu) du \right]. \end{aligned}$$

Mais nous savons que  $\int_0^\infty J_\nu(ax) J_{\nu+1}(x) dx = \begin{cases} a^\nu & 0 < a < 1 \\ \frac{1}{2} & a = 1 \\ 0 & a > 1 \end{cases}$  de sorte que lorsque  $z$  tend vers l'infini et  $\delta$

vers 0,

$$(x + \delta)^{\nu+1} \int_0^\infty J_\nu(xu) J_{\nu+1}(xu + \delta u) du = (x + \delta)^{\nu+1} \int_0^\infty \frac{1}{x + \delta} J_\nu\left(\frac{x}{x + \delta} t\right) J_{\nu+1}(t) dt = (x + \delta)^\nu \left(\frac{x}{x + \delta}\right)^\nu \rightarrow x^\nu$$

et

$$x^{\nu+1} \int_0^z J_\nu(xu) J_{\nu+1}(xu) du \rightarrow x^{\nu+1} \int_0^\infty \frac{1}{x} J_\nu(t) J_{\nu+1}(t) dt = \frac{1}{2} x^\nu.$$

On a finalement à la limite

$$x^{-\nu-1/2} f(x+0) \int_0^z J_\nu(xu) du \int_x^{x+\delta} J_\nu(yu) y^{\nu+1} dy \rightarrow x^{-\nu} f(x+0) (x^\nu - \frac{1}{2} x^\nu) = \frac{1}{2} f(x+0).$$

Pour les deux autres intégrales, il faut donc montrer que leur contribution est nulle :

$$\sqrt{x} \int_0^z u J_\nu(xu) du \int_x^{x+\delta} J_\nu(yu) y^{\nu+1} g_1(y) dy = \sqrt{x} g_1(x + \delta) \int_\lambda^{x+\delta} y^{\nu+1} dy \int_0^z u J_\nu(xu) J_\nu(yu) du \text{ avec } x < \lambda < x + \delta, \text{ soit}$$

$$\dots = \sqrt{x} g_1(x + \delta) \int_0^z u J_\nu(xu) du \int_\lambda^{x+\delta} J_\nu(yu) y^{\nu+1} dy ; \text{ or nous connaissons grâce à (4.a.2) la deuxième intégrale,}$$

$$\int_x^{x+\delta} J_\nu(yu) y^{\nu+1} dy = \frac{1}{u} \left[ (x + \delta)^{\nu+1} J_{\nu+1}(xu + \delta u) - \lambda^{\nu+1} J_{\nu+1}(\lambda u) \right] \text{ de sorte qu'en remplaçant :}$$

$$\dots = \sqrt{x} g_1(x + \delta) (x + \delta)^{\nu+1} \int_0^z J_\nu(xu) J_{\nu+1}(xu + \delta u) du - \sqrt{x} g_1(x + \delta) \lambda^{\nu+1} \int_0^z J_\nu(xu) J_{\nu+1}(\lambda u) du .$$

Or si  $\begin{cases} x \geq x_0 > 0 \\ y \geq x_0 \\ \nu \geq -\frac{1}{2} \end{cases}$  on a  $\int_0^z J_\nu(xu) J_{\nu+i}(yu) du = 0(1)$  pour toute valeur de  $z$ , l'expression précédente est donc

de l'ordre de  $g_1(x + \delta)$ , soit  $\varepsilon$  et tend vers 0 lorsque  $\delta$  tend vers 0.

Le raisonnement est exactement le même pour  $H_\nu(x, x - \delta)$  et nous obtenons donc

$$\int_0^z \sqrt{xu} J_\nu(xu) du \int_0^\infty \sqrt{yu} J_\nu(yu) f(y) dy = H_\nu(x + \delta, x) + H_\nu(x, x - \delta) \xrightarrow[\substack{\delta \rightarrow 0 \\ z \rightarrow \infty}]{\frac{1}{2}} [f(x+0) + f(x-0)]$$

ce que nous écrirons plus rapidement par

$$\int_0^\infty \sqrt{xu} J_\nu(xu) du \int_0^\infty \sqrt{yu} J_\nu(yu) f(y) dy = \frac{1}{2} [f(x+0) + f(x-0)].$$

Si nous écrivons

$$\bar{f}(t) = \int_0^\infty y f(y) J_\nu(ty) dy$$

en remplaçant  $\sqrt{y} f(y)$  par  $f(y)$ , nous obtenons (dans le cas d'une fonction continue en  $x$ )

$$\int_0^\infty u \bar{f}(u) J_\nu(xu) du = f(x)$$

qui est la *formule d'inversion* de la transformée de Hankel<sup>2</sup>.

I. Mac Robert a obtenu en 1931 une démonstration n'utilisant que la théorie des fonctions analytiques que vous trouverez dans I. N. Sneddon, *Fourier Transforms*, p 51.

On peut néanmoins donner le principal résultat obtenu par ce biais :

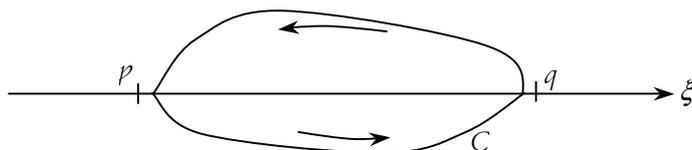
Si la partie réelle de  $\nu$  est supérieure à  $-1$  et si on a  $f(x) = \int_p^q u \varphi(u) J_\nu(xu) du$  avec  $0 \leq p < q \leq \infty$  alors

$$\int_0^\infty y f(y) J_\nu(ty) dt = \begin{cases} \varphi(t) & p < t < q \\ 0 & 0 < t < p \text{ ou } q < t < \infty \end{cases}.$$

Ce résultat est un peu moins fort que le précédent car il faut que  $f$  soit holomorphe, mais présente un avantage autre : en fait on a

$$\int_0^\infty y f(y) J_\nu(ty) dt = \frac{1}{\pi i} \int_C \varphi(\xi) \left( \frac{t}{\xi} \right)^\nu \frac{\xi}{\xi^2 - t^2} d\xi,$$

ce qui permet de calculer diverses intégrales peu engageantes. Le contour d'intégration est assez simple et est représenté ci-dessous.



### 5-b : Intégrale de Sonine

Comme exemple (important) d'utilisation nous considérons l'intégrale  $\int_0^\infty \frac{J_n(tu) J_m(u)}{u^{m-n-1}} du$  et prenons

$\varphi(u) = \frac{2^{1+n-m}}{\Gamma(m-n)} u^n (1-u^2)^{m-n-1}$  ; on choisit  $p = 0$  et  $q = 1$  d'où la fonction  $f$  considérée est

$$f(x) = \frac{2^{1+n-m}}{\Gamma(m-n)} \int_0^1 u^{n+1} (1-u^2)^{m-n-1} J_n(xu) du = \frac{2^{1+n-m}}{\Gamma(m-n)} \sum_{s=0}^\infty \int_0^1 u^{n+1} (1-u^2)^{m-n-1} \frac{(-1)^s (xu)^{n+2s}}{2^{n+2s} s! \Gamma(n+s+1)} du,$$

où nous avons remplacé  $J_n(xu)$  par son développement en série.

<sup>2</sup> Pour éviter les confusions nous noterons les transformées de Fourier avec un chapeau et les transformées de Hankel avec une barre.

Posons alors  $v = u^2$ , nous tirons

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(m-n)} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{x^{n+2s}}{2^{m+2s}} \int_0^1 v^{n+s} (1-v)^{m-n-1} \frac{(-1)^s}{s! \Gamma(n+s+1)} dv = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{2^{m+2s}} \frac{(-1)^s x^{m+2s}}{\Gamma(m+s+1)} \frac{x^{n-m}}{s!} = x^{n-m} J_m(x)$$

(le lecteur fera avec joie les quelques calculs intermédiaires utilisant les propriétés de la fonction Gamma).

Il reste à utiliser le théorème : on a  $x^{n-m} J_m(x) = \int_0^1 u \varphi(u) J_n(xu) du$ , soit

$$\int_0^{\infty} y \cdot y^{n-m} J_m(y) J_n(ty) dy = \int_0^{\infty} \frac{J_m(y) J_n(ty)}{y^{m-n-1}} dy = \begin{cases} \frac{t^n (1-t^2)^{m-n-1}}{2^{m-n-1} \Gamma(m-n)} & \text{si } 0 < t < 1 \\ 0 & \text{si } t > 1 \end{cases}.$$

### 5-c : Relations entre transformées de Hankel et de Fourier

Dans le cas à deux dimensions, considérons la TF  $\hat{f}(u, v)$  d'une fonction  $f(x, y)$  :

$$\hat{f}(u, v) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) e^{i(ux+vy)} dx dy, \text{ mais en prenant } f \text{ fonction seulement de } r = \sqrt{x^2 + y^2} :$$

$$\hat{f}(u, v) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\sqrt{x^2 + y^2}) e^{i(ux+vy)} dx dy.$$

Passons en coordonnées polaires aussi bien sur  $(x, y)$  que sur  $(u, v)$  :  $\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$  et  $\begin{cases} u = \rho \cos \varphi \\ v = \rho \sin \varphi \end{cases}$ , si bien que

$ux + vy = r\rho \cos(\theta - \varphi)$  et  $dx dy = r dr d\theta$ . On a alors

$$\hat{f}(u, v) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} \int_0^{2\pi} r f(r) e^{ir\rho \cos(\theta - \varphi)} dr d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} r f(r) dr \int_0^{2\pi} e^{ir\rho \cos(\theta - \varphi)} d\theta.$$

Comme  $\varphi$  apparaît dans la deuxième intégrale à la manière d'une phase, ce terme n'intervient pas et on obtient

$$(5.c.1) \quad \hat{f}(u, v) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} r f(r) dr \int_0^{2\pi} e^{ir\rho \cos \theta} d\theta.$$

Or la dernière intégrale est connue (voir (2.b.3)) d'où  $\hat{f}(u, v) = \hat{f}(\rho) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} r f(r) J_0(\rho r) dr$ , soit la transformée de Hankel d'ordre 0.

En fait on peut montrer par récurrence que la TF en dimension  $n$ , qui s'écrira donc

$$\hat{f}(u_1, \dots, u_n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, \dots, x_n) e^{i\vec{u} \cdot \vec{x}} dx_1 \dots dx_n$$

avec  $\vec{u} \cdot \vec{x}$  le produit scalaire des vecteurs  $\vec{u} = (u_1, \dots, u_n)$  et  $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$ , donne, sous réserve que  $f$  ne soit fonction que de  $r = \|\vec{x}\|$  :

$$\hat{f}(\vec{u}) = \frac{1}{2^{\frac{1}{2}n-1} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}n - \frac{1}{2}\right)} \int_0^{+\infty} r^{n-1} f(r) dr \int_0^{\pi} \sin^{n-2} \theta e^{ir\rho \cos \theta} d\theta,$$

et comme

$$\int_0^{\pi} \sin^{n-2} \theta e^{ir\rho \cos \theta} d\theta = 2^{\frac{1}{2}n-1} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}n - \frac{1}{2}\right) \frac{J_{\frac{1}{2}n-1}(r\rho)}{(r\rho)^{\frac{1}{2}n-1}},$$

on récupère

$$\rho^{\frac{1}{2}n-1} \hat{f}(\rho) = \int_0^{+\infty} r \left( r^{\frac{1}{2}n-1} f(r) \right) J_{\frac{1}{2}n-1}(r\rho) dr.$$

En posant  $g(r) = r^{\frac{1}{2}n-1} f(r)$  et  $\bar{g}(\rho) = \rho^{\frac{1}{2}n-1} \hat{f}(\rho)$ , on a alors

$$\bar{g}(\rho) = \int_0^{+\infty} r g(r) J_{\nu}(\rho r) dr \quad \text{et} \quad g(r) = \int_0^{+\infty} \rho \bar{g}(\rho) J_{\nu}(\rho r) d\rho$$

grâce à la formule d'inversion de la transformée de Hankel.

## 6. Fonctions de Bessel et transformée de Laplace

Soit une fonction  $f$ , nous notons  $\tilde{f}(p) = \int_0^\infty e^{-pt} f(t) dt$  sa transformée de Laplace (sous réserve de la convergence d'une telle intégrale, etc.).

### 6-a : Transformée de Laplace des fonctions de Bessel

Pour un tas de raisons qu'il serait trop long d'expliquer ici les fonctions de Bessel sont très liées aux fonctions hypergéométriques et particulièrement à

$${}_2F_1(a; b; c; x) = 1 + \frac{ab}{c} \frac{x}{1!} + \frac{a(a+1)b(b+1)}{c(c+1)} \frac{x^2}{2!} + \frac{a(a+1)(a+2)b(b+1)(b+2)}{c(c+1)(c+2)} \frac{x^3}{3!} + \dots$$

Ces fonctions ont la particularité de vérifier la relation

$$(6.a.1) \quad {}_2F_1(a; b; c; x) = \frac{1}{(1-x)^a} {}_2F_1\left(a; c-b; c; \frac{x}{x-1}\right).$$

Nous cherchons ici à évaluer l'intégrale  $J(\nu, \rho, \alpha) = \int_0^\infty u^\alpha e^{-\rho u} J_\nu(au) du$ , ce qui nous donnera la transformée de Laplace de  $u^\alpha J_\nu(au)$ . Si on écrit  $J_\nu(au)$  sous forme de série, nous avons

$$u^\alpha J_\nu(au) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r! \Gamma(\nu+r+1)} \left(\frac{a}{2}\right)^{2r+\nu} u^{2r+\nu+\alpha}$$

et

$$J(\nu, \rho, \alpha) = \int_0^\infty e^{-\rho u} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r! \Gamma(\nu+r+1)} \left(\frac{a}{2}\right)^{2r+\nu} u^{2r+\nu+\alpha} du = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r! \Gamma(\nu+r+1)} \left(\frac{a}{2}\right)^{2r+\nu} \int_0^\infty e^{-\rho u} u^{2r+\nu+\alpha} du$$

or avec  $\Gamma(x) = \int_0^\infty u^{x-1} e^{-u} du$ ,

$$\int_0^\infty e^{-\rho u} u^{2r+\nu+\alpha} du = \int_0^\infty e^{-z} \left(\frac{z}{\rho}\right)^{2r+\nu+\alpha} \frac{dz}{\rho} = \frac{1}{\rho^{2r+\nu+\alpha+1}} \int_0^\infty e^{-z} z^{2r+\nu+\alpha} dz = \frac{1}{\rho^{2r+\nu+\alpha+1}} \Gamma(2r+\nu+\alpha+1),$$

d'où

$$J(\nu, \rho, \alpha) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{\rho^{2r+\nu+\alpha+1}} \frac{(-1)^r \Gamma(2r+\nu+\alpha+1)}{r! \Gamma(\nu+r+1)} \left(\frac{a}{2}\right)^{2r+\nu} = \frac{a^\nu}{2^\nu \rho^{\nu+\alpha+1}} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\Gamma(2r+\nu+\alpha+1)}{r! \Gamma(\nu+r+1)} \left(-\frac{a^2}{\rho^2}\right)^r;$$

enfin en utilisant les propriétés de  $\Gamma$ , on obtient

$$J(\nu, \rho, \alpha) = \frac{2^\alpha a^\nu}{\rho^{\nu+\alpha+1}} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\nu + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\nu + 1\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma(\nu+1)} {}_2F_1\left(\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\nu + \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\nu + 1; \nu + 1; -\frac{a^2}{\rho^2}\right).$$

En utilisant (6.a.1) on obtient alors

$$J(\nu, \rho, \alpha) = \frac{2^\alpha a^\nu}{(a^2 + \rho^2)^{\frac{\nu+\alpha+1}{2}}} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\nu + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\nu + 1\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma(\nu+1)} {}_2F_1\left(\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\nu + \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\nu - \frac{1}{2}; \nu + 1; \frac{a^2}{a^2 + \rho^2}\right).$$

Evidemment si on prend  $\alpha = 0$  et  $a = 1$  on obtient

$$\tilde{J}_\nu(\rho) = \int_0^\infty e^{-\rho u} J_\nu(u) du = \frac{1}{(1+\rho^2)^{\frac{\nu+1}{2}}} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\nu + \frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\nu + 1\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(\nu + 1)} {}_2F_1\left(\frac{1}{2}\nu + \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\nu - \frac{1}{2}; \nu + 1; \frac{1}{1+\rho^2}\right).$$

Une autre méthode donne des résultats plus facilement exploitables : nous partons de

$$J_n(u) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(u \sin t - nt) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^\pi e^{i(nt - u \sin t)} dt,$$

nous cherchons alors

$$(6.a.2) \quad \begin{aligned} \tilde{J}_n(\rho) &= \int_0^{+\infty} \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^\pi e^{i(nt - u \sin t)} dt \right] e^{-\rho u} du = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^\pi \left[ \int_0^{+\infty} e^{i(nt - u \sin t) - \rho u} du \right] dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^\pi \left[ \frac{-e^{i(nt - u \sin t) - \rho u}}{\rho + i \sin t} \right]_0^{+\infty} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^\pi \frac{e^{int}}{\rho + i \sin t} dt \end{aligned}$$

où l'interversion des intégrales permet d'effectuer une partie du calcul. Posons maintenant  $e^{it} = z$ ,  $dz = ie^{it} dt$  et  $\sin t = \frac{1}{2i} \left( z - \frac{1}{z} \right)$ ; quand  $t$  varie de  $-\pi$  à  $\pi$ ,  $z$  parcourt le cercle trigonométrique :

$$\tilde{J}_n(\rho) = \frac{1}{\pi i} \int_C \frac{z^n}{z^2 + 2\rho z - 1} dz.$$

$z^2 + 2\rho z - 1$  a deux racines  $z_1 = -\rho - \sqrt{\rho^2 + 1}$  et  $z_2 = -\rho + \sqrt{\rho^2 + 1}$  dont seule la deuxième est à l'intérieur de  $C$ ;  $z_2$  est un pôle de la fonction à intégrer et l'intégrale est le double du résidu de cette fonction relativement au pôle, soit

$$\tilde{J}_n(\rho) = 2 \left[ \frac{z^n}{z + \rho + \sqrt{\rho^2 + 1}} \right]_{z=-\rho + \sqrt{\rho^2 + 1}} = \frac{(-\rho + \sqrt{\rho^2 + 1})^n}{\sqrt{\rho^2 + 1}}.$$

Si on remplace  $t$  par  $it$  dans (6.a.2), on obtient la fonction de Bessel modifiée  $I_n$ , définie par  $I_n(z) = i^{-n} J_n(iz)$  et grâce à la propriété que l'image de Laplace de  $f\left(\frac{t}{k}\right)$  est  $k\tilde{f}(k\rho)$ ,

$$\tilde{I}_n(\rho) = \frac{(p - \sqrt{p^2 + 1})^n}{\sqrt{p^2 - 1}}.$$

En fait les fonctions  $J_n$  et  $I_n$  sont analytiques aussi bien par rapport à l'argument que par rapport à l'indice, aussi les résultats précédents s'appliquent à des indices non entiers.

### 6-b : Calcul de l'image de $1/p$ connaissant celle de $p$

La première partie de la formule (2.b.1) fait penser à un lien fort entre  $\frac{1}{p^{n+1}} \tilde{f}\left(\frac{1}{p}\right) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{p^{n+1}} e^{-\frac{t}{p}} f(t) dt$  et les fonctions de Bessel. Le résultat est en fait le suivant :

$$(6.b.1) \quad \frac{1}{p^{n+1}} \tilde{f}\left(\frac{1}{p}\right) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{p^{n+1}} e^{-\frac{t}{p}} f(t) dt = \tilde{\varphi}(p) \text{ où } \varphi(x) = \int_0^{+\infty} \left(\frac{x}{t}\right)^{n/2} J_n(2\sqrt{xt}) f(t) dt.$$

On rappelle au préalable que la relation de base de la TL est avec  $f(t) = \frac{t^m}{m!}$ ,

$$\tilde{f}(p) = \int_0^{+\infty} \frac{t^m}{m!} e^{-pt} dt = \frac{1}{p} \int_0^{+\infty} \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} e^{-pt} dt = \dots = \frac{1}{p^m} \int_0^{+\infty} e^{-pt} dt = \frac{1}{p^{m+1}}$$

en faisant une succession d'IPP. Notez que lorsque l'on prend  $m$  non entier et même imaginaire avec partie réelle supérieure à  $-1$ , on a  $f(t) = \frac{t^m}{\Gamma(m+1)}$  et son image  $\tilde{f}(p) = \frac{1}{p^{m+1}}$ .

Prenons la fonction suivante et développons la en série :

$$\phi_x(t) = (xt)^{n/2} J_n(2\sqrt{xt}) = (xt)^{n/2} \left( \frac{2\sqrt{xt}}{2} \right)^n \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r!(n+r)!} \left( \frac{2\sqrt{xt}}{2} \right)^{2r} = (xt)^n \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r x^r t^r}{(n+r)! r!} = x^n \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r x^r}{r!} \frac{t^{n+r}}{(n+r)!},$$

soit en prenant les images de Laplace de chaque terme :

$$\tilde{\phi}_x(p) = x^n \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r x^r}{r!} \frac{1}{p^{n+r+1}} = \frac{x^n}{p^{n+1}} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r!} \left( -\frac{x}{p} \right)^r = \frac{x^n}{p^{n+1}} e^{-\frac{x}{p}}.$$

Revenons à (6.b.1) :

$$\begin{aligned} \frac{1}{p^{n+1}} \tilde{f}\left(\frac{1}{p}\right) &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{p^{n+1}} e^{-\frac{t}{p}} f(t) dt = \int_0^{+\infty} \frac{1}{t^n} \frac{t^n}{p^{n+1}} e^{-\frac{t}{p}} f(t) dt = \int_0^{+\infty} \frac{1}{t^n} \tilde{\phi}_t(p) f(t) dt \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{t^n} \left[ \int_0^{+\infty} \phi_t(x) e^{-px} dx \right] f(t) dt = \int_0^{+\infty} \left[ \int_0^{+\infty} \frac{1}{t^n} \phi_t(x) f(t) dt \right] e^{-px} dx \end{aligned}$$

$$\text{or } \int_0^{+\infty} \frac{1}{t^n} \phi_t(x) f(t) dt = \int_0^{+\infty} \frac{1}{t^n} (xt)^{n/2} J_n(2\sqrt{xt}) f(t) dt = \int_0^{+\infty} \left( \frac{x}{t} \right)^{n/2} J_n(2\sqrt{xt}) f(t) dt.$$

### 6-c : Quelques résultats complémentaires

On donne ici une liste de fonctions (multipliées par  $1_{[0, +\infty[}$ ) faisant intervenir des fonctions de Bessel et

leurs images. On appelle *fonction d'erreur* la fonction  $\Theta(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$ .

$\frac{1}{t} e^{-at} I_1(at)$	$\frac{\sqrt{p+2a} - \sqrt{p}}{\sqrt{2+2a} + \sqrt{p}}$
$\frac{\nu}{2^\nu (a-b)^\nu t} e^{-(a+b)t} I_\nu[(a-b)t], \nu > 0$	$(\sqrt{p+2a} + \sqrt{p+2b})^{-2\nu}$
$e^{-(a+b)t} I_0[(a-b)t]$	$(\sqrt{(p+2a)(p+2b)})^{-1}$
$\frac{1}{2^\nu a^\nu} e^{-at} I_\nu(at), \nu > -1$	$\frac{(\sqrt{p} + \sqrt{p+2a})^{-2\nu}}{\sqrt{p} \sqrt{p+2a}}$
$I_0(at), J_0(at)$	$\frac{1}{\sqrt{p^2 - a^2}}, \frac{1}{\sqrt{p^2 + a^2}}$
$\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(\nu)} \left( \frac{t}{2a} \right)^{\nu-1/2} I_{\nu-1/2}(at), \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(\nu)} \left( \frac{t}{2a} \right)^{\nu-1/2} J_{\nu-1/2}(at)$	$(p^2 - a^2)^{-\nu}, (p^2 + a^2)^{-\nu}, \nu > 0$
$\frac{\nu}{a^\nu} \frac{J_\nu(at)}{t}$	$(p + \sqrt{p^2 + a^2})^{-\nu}, \nu > 0$
$\frac{1}{a^\nu} I_\nu(at), \frac{1}{a^\nu} J_\nu(at)$	$\frac{1}{\sqrt{p^2 - a^2} (p + \sqrt{p^2 - a^2})^{-\nu}}, \frac{1}{\sqrt{p^2 + a^2} (p + \sqrt{p^2 + a^2})^{-\nu}}, \nu > 0$

$J_0(2\sqrt{at})$ , $\left(\frac{t}{a}\right)^{\frac{\nu-1}{2}} J_{\nu-1}(2\sqrt{at})$ , $\left(\frac{t}{a}\right)^{\frac{\nu-1}{2}} I_{\nu-1}(2\sqrt{at})$	$\frac{1}{p} e^{-a/p}$ , $\frac{1}{p^\nu} e^{-a/p}$ , $\frac{1}{p^\nu} e^{a/p}$
$\frac{1}{\sqrt{\pi t}} \cos(2\sqrt{at})$ , $\frac{1}{\sqrt{\pi t}} \sin(2\sqrt{at})$	$\frac{1}{\sqrt{p}} e^{-a/p}$ , $\frac{1}{p\sqrt{p}} e^{-a/p}$
$\frac{1}{\sqrt{\pi t}} \cosh(2\sqrt{at})$ , $\frac{1}{\sqrt{\pi t}} \sinh(2\sqrt{at})$	$\frac{1}{\sqrt{p}} e^{a/p}$ , $\frac{1}{p\sqrt{p}} e^{a/p}$
$\frac{a}{2\sqrt{\pi t^3}} e^{-\frac{a^2}{4t}}$ , $1 - \Theta\left(\frac{a}{2\sqrt{t}}\right)$ , $\frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{a^2}{4t}}$ , $\frac{1}{2t} e^{-\frac{a^2}{4t}}$	$e^{-a\sqrt{p}}$ , $\frac{1}{p} e^{-a\sqrt{p}}$ , $\frac{1}{\sqrt{p}} e^{-a\sqrt{p}}$ , $K_0(a\sqrt{p})$
$\frac{1}{2t} e^{-\frac{a^2}{4t}}$ , $\frac{1}{a} \sqrt{t(t+2)}$ , $\frac{1}{a} e^{-\frac{a^2}{4t}}$	$K_0(a\sqrt{p})$ , $\frac{1}{p} e^{ap} K_1(ap)$ , $\frac{1}{\sqrt{p}} K_1(a\sqrt{p})$ , $a > 0$
$Y_0(at)$ , $K_0(at)$	$-\frac{2}{\pi\sqrt{p^2+a^2}} \ln \frac{p+\sqrt{p^2+a^2}}{a}$ , $\frac{1}{\sqrt{p^2-a^2}} \ln \frac{p+\sqrt{p^2-a^2}}{a}$
$e^{-at} a^\nu \left(\frac{t-\lambda}{t+\lambda}\right)^{\nu/2} I_\nu\left(a\sqrt{t^2-\lambda^2}\right)$ , $t > \lambda$	$\frac{[p+a-\sqrt{p(p+2a)}]^\nu}{\sqrt{p(p+2a)}} e^{-\lambda\sqrt{p(p+2a)}}$
$a^\nu \left(\frac{t-\lambda}{t+\lambda}\right)^{\nu/2} J_\nu\left(a\sqrt{t^2-\lambda^2}\right)$ , $t > \lambda$	$\frac{[\sqrt{p^2+a^2}-p]^\nu}{\sqrt{p^2+a^2}} e^{-\lambda\sqrt{p^2+a^2}}$ , $\nu > 0$
$a^\nu \left(\frac{t-\lambda}{t+\lambda}\right)^{\nu/2} I_\nu\left(a\sqrt{t^2-\lambda^2}\right)$ , $t > \lambda$	$\frac{[p-\sqrt{p^2-a^2}]^\nu}{\sqrt{p^2-a^2}} e^{-\lambda\sqrt{p^2-a^2}}$ , $\nu > 0$
$\frac{a\lambda}{\sqrt{t^2-\lambda^2}} J_1\left(a\sqrt{t^2-\lambda^2}\right)$ , $t > \lambda$	$e^{-\lambda p} - e^{-\lambda\sqrt{p^2+a^2}}$ , $\nu > 0$
$\frac{a\lambda}{\sqrt{t^2-\lambda^2}} I_1\left(a\sqrt{t^2-\lambda^2}\right)$ , $t > \lambda$	$e^{-\lambda\sqrt{p^2-a^2}} - e^{-\lambda p}$ , $\nu > 0$
$\text{ber}(2\sqrt{t})$ , $\text{bei}(2\sqrt{t})$	$\frac{1}{p} \cos \frac{1}{p}$ , $\frac{1}{p} \sin \frac{1}{p}$

## 7. Bibliographie

E. Hairer, G Wanner, *L'analyse au fil de l'histoire*, Springer, 2001

*Indispensable pour les idées de base.*

N. Boccara, *Fonctions analytique*, Ellipses, 1996

*Un petit livre pas très épais mais très clair et facile à lire. Recommandé pour débiter.*

A. Angot, *Compléments de Mathématiques*, Masson et Cie, 1970

*Très clair et succinct, amplement suffisant jusqu'en Spé. On le trouve parfois d'occasion. Bien complet et des applications intéressantes à l'Electricité.*

H. Hochstadt, *Les fonctions de la physique mathématique*, Masson et Cie, 1973

*Epuisé, mais très intéressant ; les calculs sont parfois rudes mais méritent de s'y attarder. Là aussi assez complet sur Bessel, applications à l'Optique.*

W. Appel, *Mathématiques pour la physique et les physiciens*, H&K éd., 2002

*Passe un peu vite sur pas mal de trucs, mais reste compréhensible.*

R. Godement, *Analyse Mathématique, vol II*, Springer, 2003

*Court mais efficace sur la question de Gamma (si vous allez au-delà de bac + 2 indispensable).*

W. Rudin, *Analyse réelle et complexe*, Dunod, 1998

*Traitement moderne de l'analyse complexe, niveau bac+4. Commentaires historiques par Jean Dhombres.*

S. D. Chatterji, *Cours d'Analyse, vol II*, Presses Polytechniques et Univ. romandes, 1997

*Une référence écrite dans un style très clair et accessible ; nombreuses notes historiques.*

G. Demengel, *Transformations de Laplace*, Ellipses, 2002

*Malgré une présentation un peu fouillis on y trouve l'essentiel à connaître sur ce genre de questions. Liens intéressants entre fonctions de Bessel et Transformée de Laplace.*

E. T. Whittaker & G. N. Watson, *A modern course of analysis*, Cambridge University Press, 1927 (2003)

*Bien que ce soit en anglais c'est assez facile à lire. La référence est une réimpression de la 4<sup>ème</sup> édition datée de 1927. Le livre par lui-même contient beaucoup de choses autres et au cours du dollar c'est très intéressant... financièrement.*

G. N. Watson, *A treatise on the theory of Bessel functions*, Cambridge University Press, 1922 (1996)

*Mêmes remarques que précédemment : la référence sur beaucoup de sujets liés aux F. de Bessel et même si certaines questions sont dépassées est vraiment utile.*

I. N. Sneddon, *Fourier Transforms*, Dover, New-York, 1951 (1995)

*Beaucoup d'applications à des domaines variés. Explications assez claires même s'il faut un bon niveau parfois.*

Encyclopédie Universalis, article *Fonctions de Bessel* et ceux associés, ed. électronique, 2004

*L'ensemble est assez léger. Dommage !*

*Sur Internet, pas mal de choses...voir par exemple :*

Quelques applications

<http://www.unice.fr/DeptPhys/pilot/node1.html>

A propos de la théorie de la chaleur

<http://www.sciences.univ-nantes.fr/physique/perso/blanquet/conducti/cddex.htm>

Pour une tripotée de formules et de liens on consultera évidemment :

<http://mathworld.wolfram.com/GammaFunction.html>