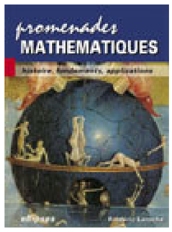


[accueil](#)

Fonctions d'une variable complexe

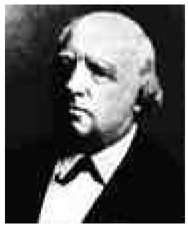
Il n'existe pas d'idée franchement mauvaise... Ce qui est franchement mauvais, c'est de ne pas avoir d'idée du tout.

Georges Polyà

Augustin Louis Cauchy
1789 - 1857

Karl Friedrich Gauss
1777 - 1855

Bernhard Riemann
1826 - 1866



Karl Weierstrass
1815 - 1897

Niels Hendrik Abel
1802 - 1829

Henri Poincaré
1854 - 1912

Jacques Hadamard
1865 - 1963

Hermann Weyl
1885 - 1955

1. Introduction et bibliographie

1-1 : ***Introduction***

La théorie des fonctions de la variable complexe a occupé de nombreux mathématiciens pendant tout le 19ème siècle et une bonne partie du 20ème. L'essentiel de la théorie sera développé par Cauchy, Riemann, Weierstrass et finalisée en partie avec les travaux d'Henri Poincaré sur les fonctions automorphes. Cette théorie est reliée en partie au développement de la Physique et tout particulièrement à celui de l'électromagnétisme ; les théories de la transformée de Fourier puis celle de Laplace-Carson ainsi que la naissance du calcul symbolique d'Oliver Heaviside montreront bien la puissance des outils considérés ; tout ceci aboutira à la généralisation la plus forte avec la théorie des distributions de Laurent Schwarz en 1945. Par ailleurs nombre de questions touchant aux mathématiques modernes se développeront pendant tout le 19ème siècle et nous ne pouvons que citer l'avant-propos de l'*Abrégé d'histoire des mathématiques* de Jean Dieudonné :

Au 18ème siècle, c'est l'Analyse qui domine, accumulant les succès spectaculaires dans ses applications à la Géométrie, à la Mécanique, à l'Astronomie et au Calcul des Probabilités. A près une sorte de pause de 1780 à 1810 environ, elle reprend dans tous les domaines sa marche conquérante, avec le prodigieux développement de la théorie des fonctions analytiques d'une variable complexe, et ce qui en est sans doute le plus étonnant chapitre, la découverte et l'étude des fonctions elliptiques, des fonctions abéliennes et des fonctions modulaires et automorphes, dont on peut dire, sans exagération qu'il constitue vraiment le cœur des mathématiques du 19ème siècle. Par ses ramifications variées, la théorie es fonctions elliptiques et des fonctions modulaires est en effet en contact, aussi bien avec le renouveau de l'Algèbre à cette époque […], qu'avec l'extraordianire floraison de la théorie des nombres algébriques qui commence avec Gauss, dont elle ne saurait se dissocier et à laquelle elle fournit ses thèmes les plus profonds ; tandis que c'est des problèmes de la théorie des fonctions abéliennes que vont naître, avec Riemann, la Géométrie algébrique et la Topologie modernes.

C'est au cours de ces développements que les mathématiciens de cette période se voient amenés insensiblement, et non de propos délibéré, à concevoir quantité d' « êtres abstraits » nouveaux : espaces de dimension arbitraire, structures algébriques et topologiques variées, etc., qui n'ont plus que des liens ténus avec les notions classiques de « nombre » et de « figure », mais sans lesquels les résultats nouveaux ne peuvent acquérir toute leur portée. […] Ainsi, à la fin du siècle, tous les thèmes des mathématiques actuelles ont été dégagés.

Historiquement parlant citons H. Poincaré qui fait un résumé rapide de la chose (*L'œuvre mathématique de Weierstrass* in Acta mathematica - Suède, tome 22 - 1899) :

La théorie moderne des fonctions analytiques a eu quatre fondateurs : Gauss, Cauchy, Riemann et Weierstrass. Gauss n'a rien publié de son vivant ; il n'avait pour ainsi dire rien communiqué à personne et ses manuscrits n'ont été retrouvés que longtemps après sa mort. Il n'a donc exercé aucune influence [1]. *[…]*

Cauchy a précédé les deux autres et leur a montré le chemin ; mais néanmoins les trois conceptions restent distinctes et cela est fort heureux puisque nous avons ainsi trois instruments entre lesquels nous pouvons choisir et dont nous pouvons souvent combiner l'action.

Pour Cauchy la définition de la fonction conserve encore un peu de l'indécision qu'elle avait chez ses devanciers. […] Une fonction quelconque peut être représentée par une intégrale définie et devient aussi maniable pour l'analyste, quelque vaguement définie qu'elle ait été au début. […]

Pour Riemann, l'image géométrique joue le rôle dominant ; une fonction n'est qu'une des lois d'après lesquelles les surfaces peuvent se transformer ; on cherche à se représenter ces transformations et non à les analyser ; leur possibilité même n'est établie que par un raisonnement sommaire auquel on n'a pu, beaucoup plus tard, donner la rigueur qu'aux prix de modifications profondes et de détours compliqués [2].

Weierstrass se place à l'extrême opposé : le point de départ est la série de puissances, l'élément de la fonction qui est confiné dans un cercle de convergence ; pour poursuivre la fonction en dehors de ce cercle, nous avons le procédé de la continuation anlytique ; tout devient ainsi une conséquence de la théorie des séries et cette théorie est elle-même établie sur des bases atithmétiques et solides.

Grosso-modo et pour simplifier, les distributions sont un aboutissement de la théorie linéaire des fonctions, quoique la découverte des ondelettes il y a une vingtaine d'années laisse supposer que de nombreux terrains de chasse restent ouverts… Mais un autre aspect non négligeable est la question de la non-linéarité, et là-encore de multiples champs d'investigation restent à explorer : l'exemple des fonctions modulaires, des splines, des solutions d'EDP en hydrodynamique, etc. sont là pour nous rappeler que l'exploration du domaine complexe est loin d'être finie et ceci sans parler des espaces $\mathbb{C}^n$ et particulièrement des quaternions et des octonions.

L'unification des différents chapitres de la Physique moderne sous la bannière des champs a montré la profonde unité des principaux concepts ; il reste encore un lourd travail à effectuer : tout réécrire en utilisant les algèbres de nombres comme les quaternions ou les hypernombres comme ceux de C. Davenport. Cette simplification fondamentale permettra alors forcément de nouvelles avancées.

Nous ne pouvons que conseiller à tout étudiant en Sciences « dures », Mathématiques et/ou Physique, de lire et approfondir les notions ici présentées. La bibliographie fournit un éventail relativement large d'ouvrages, certains très accessibles, d'autres moins, mais tous présentent un intérêt certain et différent.

Le texte suit en partie le plan du livre de Henri Cartan, lequel développe la théorie de Cauchy améliorée par E. Artin, mais en dévie sur certains plans comme la conformité et le prolongement analytique. Pour ce qui est de la théorie de Riemann, trop longue à traiter ici, le lecteur pourra consulter [App], [Val] et [Cha]. Par ailleurs une partie des utilisations de la théorie est développée dans d'autres parties disponibles sur le site pour certaines :

La fonction Gamma,

Les fonctions de Bessel,

Fourier (en préparation),

Les polynômes orthogonaux (en préparation),

Les fonctions elliptiques (en préparation).

---

[1] Cette affirmation de Poincaré est à prendre avec des pincettes : la thèse de Riemann a été supervsée par Gauss, et les problèmes géométriques soulevés sont permanents dans les deux œuvres. Par ailleurs Eisenstein, qui travailla beaucoup sur les séries doublement périodiques qui aboutiront aux fonctions elliptiques était l'élève préféré de Gauss…

[2] Poincaré écrit en 1899 : Hermann Weyl reprendra tous les théorèmes de Riemann lorsqu'il publia *Die Idee der Riemannschen Fläche* (1913) qui unifiait l'analyse, la géométrie et la topologie. Il produisit alors la première théorie unifiée dans laquelle le champ électromagnétique de Maxwell et le champ gravitationnel apparaissaient comme des propriétés géométriques de l'espace-temps.

1-2 : ***Bibliographie***

[Ang] A. Angot, *Compléments de Mathématiques*, Masson et Cie, 1970

Très clair et succinct, amplement suffisant jusqu'en Spé. On le trouve parfois d'occasion.

[App] W. Appel, *Mathématiques pour la physique et les physiciens*, H&K éd., 2002

Passe un peu vite sur pas mal de trucs, mais reste compréhensible.

[Boc] N. Boccara, *Fonctions analytique*, Ellipses, 1996

Un petit livre pas très épais mais très clair et facile à lire. Recommandé pour débuter.

[Car] H. Cartan, *Théorie élémentaire des fonctions analytiques*, Hermann, 1961 (1992)

Agréable à lire ; seule la question du prolongement analytique est traitée de manière un peu délicate.

[Cha] S. D. Chatterji, *Cours d'Analyse, vol II*, Presses Polytechniques et Univ. romandes, 1997

Une référence écrite dans un style très clair et accessible ; nombreuses notes historiques.

[Dem] G. Demengel, *Transformations de Laplace*, Ellipses, 2002

Malgré une présentation un peu fouillis on y trouve l'essentiel à connaître sur ce genre de questions.

[Die] J. Dieudonné et al., *Abrégé d'histoire des Mathématiques*, ch. 4 (J. L. Verley)

Il est recommandé de lire ce chapitre avant et après avoir lu le texte qui suit…

[Edw] H. M. Edwards, *Riemann's Zeta Function*, Dover Pub., 1974 (2001)

Si vous le trouvez ouvrez votre portefeuille, c'est la référence.

[God] R. Godement, *Analyse Mathématique, vol 1 à 4*, Springer, 2000-2004

Si vous allez au-delà de bac + 2 indispensable.

[Hai] E. Hairer, G Wanner, *L'analyse au fil de l'histoire*, Springer, 2001

Indispensable pour les idées de base.

[Hoc] H. Hochstadt, *Les fonctions de la physique mathématique*, Masson et Cie, 1973

Epuisé, mais très intéressant ; les calculs sont parfois rudes mais méritent de s'y attarder.

[Rud] W. Rudin, *Analyse réelle et complexe*, Dunod, 1998

Traitement moderne de l'analyse complexe, niveau bac+4. Commentaires historiques par Jean Dhombres.

[Spa] J. Spanier & K. B. Oldam, *An atlas of functions*, Hemisphere Pub. Corp., 1987

Assez cher (à faire acheter par votre bibliothèque préférée…), mais fournit un bon catalogue des propriétés fondamentales des principales fonctions utiles.

[Val] G. Valiron, *Théorie des fonctions*, Masson et Cie, 1966

Epuisé, mais se trouve facilement d'occasion. Il y a beaucoup de choses là-dedans, que l'on ne retrouve pas ailleurs (géométrie hyperbolique, fonctions modulaires, etc.) et en plus c'est facile à lire.

[Whi] E. T. Whittaker & G. N. Watson, *A modern course of analysis*, Cambridge University Press, 1927 (2003)

Bien que ce soit en anglais c'est assez facile à lire. La référence est une réimpression de la 4ème édition datée de 1927. Le livre par lui-même contient beaucoup de choses autres et au cours du dollar c'est très intéressant… financièrement.

[Zis] M. Zissman, *Mathématiques pour l'agrégation*, Dunod, 1996

Beaucoup de choses qui partent dans beaucoup de directions.

[Uni] Encyclopédie Universalis, ed. électronique, 2004, article *Fonctions analytiques* et sq.

Sur internet :

http://www.meca.unicaen.fr/Enseignement/Licence/Math/cours/cours.html

http://yttriumath.free.fr/math/licence/sommaire.htm

http://www.cpge-cpa.ac.ma/cpa/maths/dudeComplexe.pdf

Très complet, sans trop de références topologiques, même plan qu'ici.

http://www.dptmaths.ens-cachan.fr/IMG/pdf/cours_ana_compl_desvillettes.pdf

Assez court et clair ; on y trouve des applications comme l'utilisation des fonctions holomorphes en mécanique des fluides.

Sur Gallica : http://gallica.bnf.fr/ on trouve pas mal de choses, voir particulièrement :

P. Appell, *Principes de la théorie des fonctions elliptiques et applications*

Briot et Bouquet, *Etude des fonctions d'une variable imaginaire*

B. Riemann, *Œuvres complètes* (avec particulièrement la « dissertation inaugurale », n°173)

N. H. Abel, *Œuvres complètes*

A. Cauchy, *Œuvres complètes*

J. Liouville, *Journal de Mathématiques pures et appliquées (tous les volumes…)*

2. Fonctions holomorphes

2-1 : ***Rappels***

Rappelons la définition d'une fonction holomorphe : soit f une fonction de $\mathbb{C}$ vers $\mathbb{C}$ telle que $\lim_{h\to 0}\frac{f(z+h))-f(z)}{h}=f\,'(z)$ existe, alors f est *holomorphe* sur C.

Si f est différentiable sur $\mathbb{C}$, elle a des dérivées partielles en x et y et on peut écrire

$$df=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}-i\frac{\partial f}{\partial y}\right)dz+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}+i\frac{\partial f}{\partial y}\right)d\overline{z}$$

soit encore

$$df=\frac{\partial f}{\partial z}dz+\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}d\overline{z} \qquad (\mathbf{1})$$

en prenant les opérateurs différentiels

$$\frac{\partial}{\partial z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}-i\frac{\partial}{\partial y}\right),\ \frac{\partial}{\partial \overline{z}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right).$$

Nous avons vu que la fonction différentiable f est holomorphe si les conditions de Cauchy sont repectées, à savoir, si $f = P+iQ$:

$$\frac{\partial P}{\partial x}=\frac{\partial Q}{\partial y},\ \frac{\partial P}{\partial y}=-\frac{\partial Q}{\partial x} \qquad (\mathbf{2})$$

On peut voir cela de la manière suivante : un complexe peut être assimilé à une matrice $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a\end{pmatrix}$ et l'expression de la différentielle de f peut s'exprimer par sa matrice jacobienne : $\begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} & \frac{\partial Q}{\partial x} \\ \frac{\partial P}{\partial y} & \frac{\partial Q}{\partial y}\end{pmatrix}=J_f$; pour que df représente effectivement un complexe, il faut que les conditions (**2**) soient repectées.

On peut également remarquer que les conditions (**2**) donnent dans (**1**) : $df=\frac{\partial f}{\partial z}dz$, soit $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}dz=0$ et la dérivation complexe revient à multiplier par la matrice jacobienne.

Une fonction telle que $\frac{\partial f}{\partial z}dz=0$ est dite *antiholomorphe* ; les propriétés des fonctions antiholomorphes sont globalement les mêmes que celles des fonctions holomorphes. Les problèmes se posent lorsque holomorphe et antiholomorphe sont mélangées.

2-2 : ***Fonctions analytiques***

On dira qu'une fonction f est *analytique* sur un ouvert U de $\mathbb{C}$ si elle est développable en série de puissances en tout point z_0 de U, ou encore : il existe pour tout z_0 un réel $r > 0$ tel que pour tout z de la boule ouverte $B(O, r)$ de centre O, de rayon r la série $\sum_{n\geq 0}a_n z^n$ soit convergente et pour tout z de $U\cap B(z_0,r)$

$$f(z)=\sum_{n\geq 0}a_n(z-z_0)^n .$$

Une fonction analytique sur $\mathbb{C}$ entier est appelée *fonction entière*.

Si f est analytique, la série $\sum_{n\geq 0}na_n z_0^{n-1}$ converge, donc $f'(z)$ existe et f est holomorphe.

La réciproque est plus délicate à établir (voir §2-5 : formule de Cauchy), à savoir que si f est holomorphe alors elle est analytique (une conséquence est alors que les fonctions holomorphes sont indéfiniment différentiables).

On regarde quand même un exemple : soit la fonction $z \to \frac{1}{z}$ dont nous avons vu qu'elle était holomorphe ; nous écrivons

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{z_0 + z - z_0} = \frac{1}{z_0} \frac{1}{1 + \frac{z - z_0}{z_0}} \;;$$

si $|z - z_0| < |z_0|$ alors $r = \left| \frac{z - z_0}{z_0} \right| < 1$ et la deuxième fraction est la somme des termes d'une série géométrique de raison $-\frac{z - z_0}{z_0}$, d'où $\frac{1}{1 + \frac{z - z_0}{z_0}} = \sum_{n \geq 0} \left(-\frac{z - z_0}{z_0} \right)^n = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{z_0{}^n} (z - z_0)^n$ et $\frac{1}{z} = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{z_0^{n+1}} (z - z_0)^n$ sur toute boule ouverte de rayon r, donc sur $\mathbb{C} - \{0\}$.

2-3 : ***Chemins***

Revenons à notre problème en regardant de plus près la question de l'intégration des fonctions holomorphes : nous avons affirmé dans le livre que pour une fonction de la variable complexe l'intégration se faisait le long de chemins et que le chemin choisi ne changeait rien à la valeur de l'intégrale. Reprenons tout cela à la base.

Soit U un ouvert du plan complexe, on appelle *courbe* dans U la donnée d'une application continue $\gamma = [0, 1] \to U$; si $\gamma(0) = \gamma(1)$ la courbe est *fermée*, elle est *simple* si elle ne se recoupe pas.

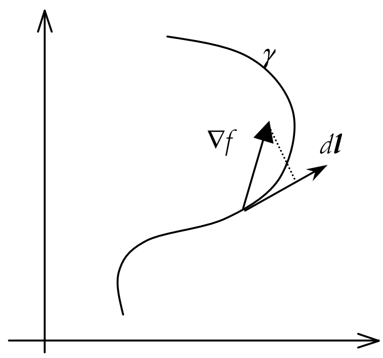
Un *chemin* de $[a, b]$ vers U est constitué d'une succession de courbes continûment dérivables par morceaux.

Si $\gamma : [a, b] \to U$ est un chemin, on a

$$\gamma(b) - \gamma(a) = \int_a^b \gamma'(t) dt \,.$$

Prenons un petit élément de chemin $d\mathbf{l} = \left(\frac{d\gamma_1}{dt}, \frac{d\gamma_2}{dt} \right)$ où γ_1 et γ_2 sont les parties réelle et imaginaire de γ et une fonction f de U vers $\mathbb{R}$, de gradient $\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right)$, alors

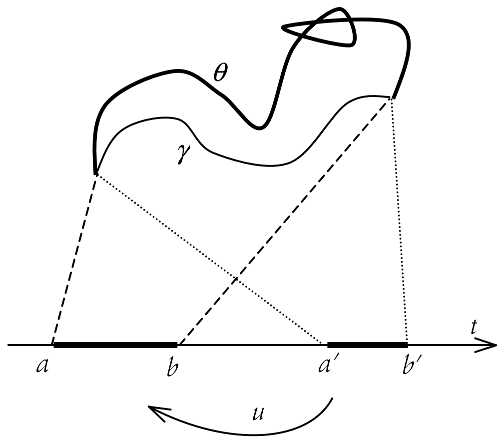
$$f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)) = \int_a^b (\nabla f . d\mathbf{l}) dt \qquad (\mathbf{3}).$$



Ceci n'est valable que si f est à valeurs dans $\mathbb{R}$ …

En général pour une fonction complexe (pas forcément holomorphe) on définit l'intégrale de f sur le chemin γ par

$$\int_\gamma f(z)dz=\int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt \qquad (\mathbf{4}).$$



Si on prend un autre chemin θ équivalent à γ, i.e. tel que $\theta([a', b'])=\gamma([a, b])$, alors il existe une application u de $[a, b]$ vers $[a', b']$ telle que $\theta(t)=\gamma(u(t))$ pour tout t de $[a, b]$; soit $\varphi=f\circ\gamma$: $\varphi'(t)=\gamma'(t)f(\varphi(t))$ d'où

$$\int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt=\int_a^b \varphi'(t)dt=\varphi(b)-\varphi(a)=f(\gamma(b))-f(\gamma(a)).$$

Puisque tous les chemins possibles arrivent en $\gamma(a)$ et $\gamma(b)$ la valeur de l'intégrale est la même pour tous les chemins suivis.

Reprenons notre forme $f = P+iQ$ alors

$$\begin{aligned}\int_\gamma f(z)dz&=\int_\gamma P(z)dz+i\int_\gamma Q(z)dz=\int_a^b(\nabla P d\mathbf{l})dt+i\int_a^b(\nabla Q d\mathbf{l})\\&=\int_a^b\frac{\partial P}{\partial x}(\gamma(t))\frac{d\gamma_1}{dt}+\frac{\partial P}{\partial y}(\gamma(t))\frac{d\gamma_2}{dt}dt+i\int_a^b\frac{\partial Q}{\partial x}(\gamma(t))\frac{d\gamma_1}{dt}+\frac{\partial Q}{\partial y}(\gamma(t))\frac{d\gamma_2}{dt}dt\\&=\int_a^b\left[\frac{\partial P}{\partial x}+i\frac{\partial Q}{\partial x}\right](\gamma(t))\frac{d\gamma_1}{dt}+\left[\frac{\partial P}{\partial y}+i\frac{\partial Q}{\partial y}\right](\gamma(t))\frac{d\gamma_2}{dt}dt.\end{aligned}$$

en utilisant (**3**).

Remarquons alors que les conditions de Cauchy nous donnent

$$\frac{\partial P}{\partial x}+i\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial x}-i\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial y}+i\frac{\partial Q}{\partial x}=i\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-i\frac{\partial Q}{\partial x}\right)$$

d'où

$$\frac{\partial P}{\partial x}+i\frac{\partial Q}{\partial y}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial P}{\partial x}-i\frac{\partial P}{\partial y}\right)+\frac{1}{2}i\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-i\frac{\partial Q}{\partial y}\right)=\frac{\partial f}{\partial z}\text{ et }\frac{\partial P}{\partial y}-i\frac{\partial Q}{\partial y}=i\frac{\partial f}{\partial z},$$

soit finalement

$$\int_\gamma f(z)dz=\int_a^b\frac{\partial f}{\partial z}\left(\frac{d\gamma_1}{dt}+i\frac{d\gamma_2}{dt}\right)dt=\int_a^b\frac{\partial f}{\partial z}\gamma'(t)dt=\int_\gamma\frac{\partial f}{\partial z}dz.$$

Si la fonction f n'est pas holomorphe, la relation précédente n'a pas vraiment de sens.

2-4 : ***Indice d'un chemin***

La longueur d'une courbe et donc d'un chemin est classiquement $L_\gamma = \int_a^b |\gamma'(t))| dt$ et si on appelle $M = \sup_{z\in\gamma} |f(z)|$, alors

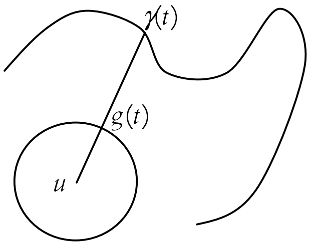
$$\left| \int_\gamma f(z)dz \right| \leq M.L_\gamma .$$

Ce résultat est assez évident, aussi poursuivons en définissant l'*indice* d'un chemin : prenons un point de γ parcouru par un point d'affixe $\gamma(t)$ et un point u n'appartenant pas à γ ; considérons maintenant la fonction g définie comme suit :

$$g : [a, b] \to \mathbb{C} - \{u\} / g(t) = u + \frac{\gamma(t)-u}{|\gamma(t)-u|}.$$

Nous remarquons que $|g(t)-u| = 1$, ce qui signifie que le point $z = g(t)$ est sur le cercle $C(u, 1)$. Quand $\gamma(t)$ parcourt γ, z parcourt C un certain nombre de fois : nous pouvons écrire $g(t) = u + e^{2i\pi k}$, k réel, soit

$$\gamma(t) = u + |\gamma(t)-u| e^{2i\pi k} \qquad (\mathbf{5}).$$



Que se passe-t'il si γ est fermée ? Prenons $\gamma(t)$ définie sur [0 ; 1], γ est fermé donc $\gamma(1) = \gamma(0)$. Considérons maintenant φ définie par $\varphi(t) = \frac{\gamma(t)-u}{\gamma(0)-u}$, soit

$$\frac{\varphi(t)}{\gamma(t)-u} = \frac{1}{\gamma(0)-u}$$

et dérivons :

$$\frac{\varphi'(t)(\gamma(t)-u) - \varphi(t)\gamma'(t)}{(\gamma(t)-u)^2} = 0$$

d'où

$$\frac{\varphi'(t)}{\gamma(t)-u} = \frac{\varphi(t)\gamma'(t)}{(\gamma(t)-u)^2} \text{ et } \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} = \frac{\gamma'(\tau)}{\gamma(t)-u}.$$

Intégrons en utilisant la détermination principale du logarithme : ln entre 0 et t :

$$\ln(\varphi(t)) - \ln(\varphi(0)) = \int_0^t \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-u} dt$$

or $\varphi(0) = 1$, d'où $\varphi(t) = \exp\left(\int_0^t \frac{\gamma'(\tau)}{\gamma(t)-u} dt \right)$.

Par ailleurs si nous calculons $\varphi(1)$ en utilisant (**5**) nous obtenons

$$\varphi(1) = \frac{\gamma(1)-u}{\gamma(0)-u} = \frac{|\gamma(1)-u| e^{2i\pi k}}{|\gamma(0)-u|} = e^{2i\pi k}$$

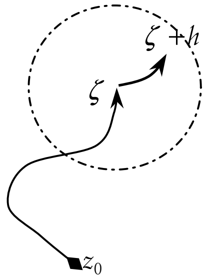
puisque $\gamma(1)=\gamma(0)$. On déduit donc de tout ça que $\int_0^1 \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-u}dt = 2i\pi k$, soit

$$k = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{dz}{z-u}$$

qui est l'*indice* de u par rapport à γ : $I_\gamma(u)$.

Particulièrement si γ est un cercle de centre O, de rayon r contenant u (u est dans le disque limité par γ mais pas sur le bord), l'indice de u par rapport à γ est le nombre de tours effectués par γ d'où $k=1$; si u est en dehors du disque, $k=0$.

2-5 : ***Formule de Cauchy***



Définissons maintenant la fonction F sur un ouvert U connexe par $F(\zeta)=\int_{\gamma_\zeta} f(z)dz$ où γ_ζ est un chemin menant d'un point z_0 quelconque de U à ζ

Considérons également la boule B de centre ζ de rayon ρ, contenue dans U ; le point $\zeta+h$ est dans B si h est suffisamment petit ainsi que l'arc $\gamma' = \widehat{\zeta\zeta+h}$; notons γ^* le chemin de z_0 à $\zeta+h$, nous avons alors :

$$F(\zeta+h)-F(\zeta) = \int_{\gamma^*} f(z)dz - \int_\gamma f(z)dz = \int_{\gamma'} f(z)dz$$

et

$$\frac{F(\zeta+h)-F(\zeta)}{h} = \frac{1}{h}\int_{\gamma'} f(z)dz \;;$$

supposons que f ait une primitive *locale* en ζ, soit une fonction φ telle que $\varphi'(z)=f(z)$ dans B, alors

$$\frac{1}{h}\int_{\gamma^*} f(z)dz = \frac{1}{h}[\varphi(\zeta+h)-\varphi(\zeta)] \underset{h\to 0}{\to} f(\zeta)$$

et finalement $F'(\zeta)=f(\zeta)$.

A priori cette remarque semble un peu bizarre, mais en fait c'est assez intéressant dans la mesure où le fait de savoir que l'on a une primitive de f aux environs d'un point donné dit qu'il y a une primitive de f dans tout ouvert simplement connexe contenant ce point… et par conséquent toute fonction holomorphe sur U aura une primitive dans U.

Particulièrement si on considère un chemin *fermé* γ et une fonction holomorphe f sur U contenant γ, on a

$$\int_\gamma f(z)dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) = 0\,.$$

Nous arrivons maintenant au cœur du problème : à savoir réécrire l'égalité des accroissements finis dans le cas complexe ; prenons la fonction suivante sur U

$$\varphi(z) = \begin{cases} \frac{f(z)-f(u)}{z-u} \text{ si } z\neq u \\ f'(u) \text{ si } z=u \end{cases}.$$

A priori φ est continue et holomorphe d'où $\int_\gamma \varphi(z)dz = 0$ où γ est fermé et ne contient pas u ; on a donc

$$0 = \int_\gamma \frac{f(z)}{z-u}dz - f(u)\int_\gamma \frac{dz}{z-u}$$

et en reconnaissant l'indice de γ dans la deuxième intégrale :

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f(z)}{z-u}dz = f(u).I_\gamma(u)\ .$$

C'est la *formule de Cauchy* que nous utilisons au cas où le chemin d'intégration est un cercle de centre a, de rayon r : l'indice vaut 1 dans ce cas et le paramétrage de γest donné par $\gamma(t) = a + re^{2i\pi t}$, $t \in [0, 1]$ d'où :

$$\frac{1}{2i\pi}\int_0^1 \frac{f(a+re^{2i\pi t})}{a+re^{2i\pi t}-a}2i\pi re^{2i\pi t}dt = f(a)$$

et enfin

$$f(a) = \int_0^1 f(a+re^{2i\pi t})dt$$

qui n'est autre que la *formule de la moyenne* : la valeur de f en a est la moyenne des valeurs de f sur n'importe quel cercle de centre a.

Si vous avez bien suivi tout ce qu'on a fait jusqu'à présent vous avez dû vous rendre compte que nous avons suivi la même démarche que dans le cas réel : dérivabilité, acroissements finis, moyenne, il ne nous reste plus qu'à donner Taylor, ce qui revient en fait à montrer l'implication :

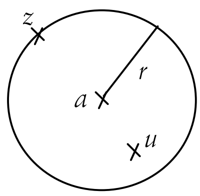
si *f* est holomorphe alors *f* est analytique.

Prenons donc a dans un ouvert U de $\mathbb{C}$ et la boule $B(a, r)$ contenue dans U délimitée par le cercle C ; pour tout u dans B, $I_C(u) = 1$ et

$$f(u) = \frac{1}{2i\pi}\int_C \frac{f(z)}{z-u}dz\ ; \quad (\mathbf{6})$$

reprenons le raisonnement fait pour $1/z$ et considérons la série géométrique de raison $\frac{u-a}{z-a}$:

$\left|\frac{u-a}{z-a}\right| = \frac{|u-a|}{|z-a|} = \frac{|u-a|}{r} < 1$ pour tout z sur C.



On a alors

$$\sum_{n\geq 0}\left(\frac{u-a}{z-a}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{u-a}{z-a}} = \frac{z-a}{z-a-u+a} = \frac{z-a}{z-u} \text{ soit } \frac{1}{z-u} = \sum_{n\geq 0}\frac{(u-a)^n}{(z-a)^{n+1}}\ ;$$

remplaçons dans notre intégrale :

$$f(u) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z-u}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)\sum_{n\geq 0}\frac{(u-a)^n}{(z-a)^{n+1}}dz = \frac{1}{2\pi i}\sum_{n\geq 0}\int_C f(z)\frac{(u-a)^n}{(z-a)^{n+1}}dz = \sum_{n\geq 0}c_n(u-a)^n$$

où

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz\ .$$

Encore une « petite » chose : calculons

$$f^{'}(u) = 0 + c_1 + 2c_2(u-a) + \ldots + nc_n(u-a)^{n-1} + \ldots$$
$$\ldots$$
$$f^{(n)}(u) = 0 + 0 + 0 + \ldots + n!c_n + (n+1)n\ldots 2c_{n+1}(u-a) + \ldots$$

d'où on tire $f^{(n)}(a) = n!c_n$, d'où $\frac{1}{n!}f^{(n)}(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz$, ce qui donne la formule de Taylor pour une fonction holomorphe :

$$f(u) = \sum_{n\geq 0}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(u-a)^n\ .$$

Exemple 1 : on cherche une fonction *f*, analytique sur le disque de centre *O*, de rayon 1, valant $\frac{a-\cos\theta}{a^2-2a\cos\theta+1} + i\frac{\sin\theta}{a^2-2a\cos\theta+1}$ sur le cercle trigonométrique ($a > 1$).

On a en faisant d'abord le changement de variable $z = e^{i\theta}$ puis le changement inverse :

$$\frac{1}{n!}f^{(n)}(0) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z^{n+1}}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} e^{-i(n+1)\theta}\frac{a-\cos\theta+i\sin\theta}{a^2-2a\cos\theta+1}ie^{i\theta}d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-in\theta}\frac{a-e^{-i\theta}}{(a-e^{-i\theta})(a-e^{i\theta})}d\theta$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{-in\theta}}{a-e^{i\theta}}d\theta = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{dz}{z^{n+1}(a-z)}dz = \left[\frac{d^n}{dz^n}\left(\frac{1}{a-z}\right)\right]_{z=0} = \frac{1}{a^{n+1}}.$$

D'où, avec Taylor : $f(z) = \sum_{n\geq 0}\frac{1}{a^{n+1}}z^n$ dans le disque, alors que *f* vaut $\frac{1}{a-z}$ sur le bord du disque. Ceci est tout à fait normal dans la meseure où on est en présence de la somme des termes d'une suite géométrique, par contre on peut se poser la question suivante : peut-on définir *f* par $\frac{1}{a-z}$ à l'extérieur du cercle ? C'est la question du prolongement analytique qui se pose ici.

Exemple 2 : soit *h* une constante réelle positive, l'expression $\frac{1}{\sqrt{1-2zh+h^2}}$ se développe avec Taylor sous la forme $f(z,\ h) = 1 + hP_1(z) + h^2P_2(z) + \ldots$ où $P_n(z)$ est un polynôme de degré *n*, le *polynôme de Legendre*. La question qui se pose est de savoir sous quelles conditions cette série converge…

Considérons *f* comme une fonction de *h* seul, *h* complexe quelconque : la série converge dans un cercle de centre $h = 0$ (dans le plan des *h*) et ne contenant aucune des singularités de *f*, à savoir les valeurs de *h* annulant $1-2zh+h^2$, soit $h_1 = z+\sqrt{z^2-1}$ et $h_2 = z-\sqrt{z^2-1}$. Par conséquent la série converge tant que $|h| < \inf(|h_1|, |h_2|)$.

Considérons dans le plan des *z*, l'ellipse de foyers $+1$ et -1, passant par *z* ; notons *a* son demi grand-axe et θ l'excentricité de *z* : on a alors $z = a\cos\theta + i\sqrt{a^2-1}\sin\theta$ d'où

$$h_{1,2} = z \pm \sqrt{z^2-1} = \left[a \pm \sqrt{a^2-1}\right]\left[\cos\theta \pm i\sin\theta\right] \Rightarrow \left|h_{1,2}\right| = a \pm \sqrt{a^2-1}\ .$$

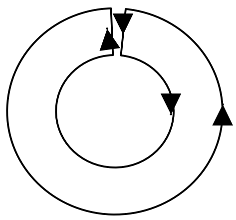
Le plus petit des deux est évidemment $a-\sqrt{a^2-1} = |h|$ d'où $a = \frac{1}{2}\left(|h| + \frac{1}{|h|}\right)$. La série converge donc si z est sur une ellipse de foyers 1 et -1 et de demi grand-axe $\frac{1}{2}\left(h+\frac{1}{h}\right)$.

2-6 : ***Séries de Laurent***

Pour l'instant nous n'avons défini des fonctions analytiques que sur des boules ouvertes, regardons ce qui se passe dans une couronne ouverte contenant u :

$$U=\{z\in\mathbb{C}\,/\,R_2<|z-u|<R_1\}.$$

Prenons une fonction holomorphe f dans U et considérons la couronne sectionnée suivante :



on a

$$f(u)=\int_\gamma\frac{f(z)}{z-u}dz=\int_{\gamma_1}\frac{f(z)}{z-u}dz-\int_{\gamma_2}\frac{f(z)}{z-u}dz \qquad (\mathbf{7})$$

à la limite lorsque les deux segments sont confondus : le contour γ_1 correspond au cercle extérieur parcouru dans le sens positif, le contour γ_2 correspond au cercle intérieur parcouru dans le sens négatif.

On recommence alors ce qui a été fait pour Cauchy ; à l'intérieur de γ_1 on a

$$\frac{1}{z-u}=\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{u}{z}}=\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{u^n}{z^n}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{u^n}{z^{n+1}}$$

puisque pour tout z sur γ_1 on a

$$|z-u|<R_1\Rightarrow\left|\frac{u}{z}\right|<1\ ;$$

à l'extérieur de γ_2 c'est le contraire : pour tout z sur γ_2, $|z-u|>R_2\Rightarrow\left|\frac{z}{u}\right|<1$ d'où

$$\frac{1}{z-u}=-\frac{1}{u}\frac{1}{1-\frac{z}{u}}=-\frac{1}{u}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{u^n}=-\sum_{n=-\infty}^{-1}\frac{u^n}{z^{n+1}}$$

(on fait deux petits changements d'indice) ; finalement en remplaçant dans (**7**) on a :

$$f(u)=\int_{\gamma_1}f(z)\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{u^n}{z^{n+1}}dz+\int_{\gamma_2}f(z)\sum_{n=-\infty}^{-1}\frac{u^n}{z^{n+1}}dz.$$

Prenons un contour C parcouru une seule fois dans le sens direct à l'intérieur de la couronne, nous avons alors

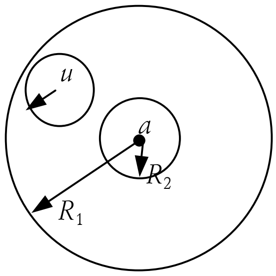
$$f(u)=\int_C f(z)\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{u^n}{z^{n+1}}dz\,.$$

En utilisant les mêmes raisonnements que précédemment on définit ainsi la *série de Laurent* de f par

$$f(u)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}c_n(u-a)^n,\ c_n=\frac{1}{2i\pi}\int_C\frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz$$

où z appartient à un ouvert U ne contenant pas a. Les convergences absolue et uniforme sont assurées pour tout z dans la couronne ouverte.

La réciproque est vraie : toute fonction ayant une série de Laurent convergente dans une couronne est holomorphe sur cette couronne.



Le rôle de a est particulièrement important : supposons tout d'abord que R_2 tende vers 0 ; si f est bornée au voisinage de a, tous les termes $(u-a)^n$ avec $n<0$ tendront vers 0 et tous les c_n correspondants seront nuls. On retrouve ainsi notre ami Taylor.

Ceci autorise d'ailleurs le prolongement de f à a si f est bornée au voisinage de a, puisque dans ce cas f est holomorphe et analytique dans $B(a, R_1)$ (*théorème de Riemann*).

Exemple : montrer que dans l'anneau défini par $|a|<|z|<|b|$, la fonction $f(z)=\sqrt{\dfrac{bz}{(z-a)(b-z)}}$ peut se réprésenter par $s_0+\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}s_n\left(\frac{a^n}{z^n}+\frac{z^n}{b^n}\right)$ où $s_n=\displaystyle\sum_{p=0}^{\infty}\frac{1.3...(2p-1).1.3...(2p+2n-1)}{2^{2p+n}p!(p+n)!}\left(\frac{a}{b}\right)^p$.

La fonction f est analytique et univalente dans l'anneau $|a|<|z|<|b|$ (normalement la racine d'une expression peut représenter deux valeurs différentes puisque l'argument est connu modulo π) car les points de branchement en $z=0$ sont neutralisés par a.

Appelons C le cercle $|z|=r$, avec $|a|<r<|b|$, alors le coeficient de z^n est $c_n=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_C\frac{f(z)}{z^{n+1}}dz$.

Remplaçons z par $re^{i\theta}$,

$$f(z)=\sqrt{\frac{bre^{i\theta}}{(re^{i\theta}-a)(re^{i\theta}-z)}} \text{ et } c_n=\frac{1}{2\pi}r^{-n}\int_0^{2\pi}e^{-in\theta}\left(1-\frac{r}{b}e^{i\theta}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(1-\frac{a}{r}e^{-i\theta}\right)^{-\frac{1}{2}}d\theta.$$

On développe classiquement les deux parenthèses :

$$\left(1-\frac{r}{b}e^{i\theta}\right)^{-\frac{1}{2}}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1.3....(2k-1)}{2^k k!}\frac{r^k e^{ik\theta}}{b^k} \text{ et } \left(1-\frac{a}{r}e^{-i\theta}\right)^{-\frac{1}{2}}=\sum_{p=0}^{\infty}\frac{1.3....(2p-1)}{2^p p!}\frac{a^p e^{-ip\theta}}{r^p},$$

les séries étant absolument et uniformément convergentes pour θ.

Ceci donne alors $c_n=\dfrac{1}{2\pi}r^{-n}\displaystyle\int_0^{2\pi}e^{-in\theta}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1.3....(2k-1)}{2^k k!}\frac{r^k e^{ik\theta}}{b^k}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1.3....(2p-1)}{2^p p!}\frac{a^p e^{-ip\theta}}{r^p}d\theta$; les seules intégrales non nulles sont celles où $k=p+n$, ce qui donne

$$c_n=\frac{1}{2\pi}r^{-n}r^{p+n}r^{-p}\int_0^{2\pi}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{1.3....(2p-1)}{2^p p!}\frac{1.3....(2p+2n-1)}{2^{p+n}(p+n)!}\frac{a^p}{b^{p+n}}d\theta=\frac{s_n}{b^n}.$$

De même on obtient que le coefficient de $\dfrac{1}{z^n}$ est $s_n a^n$ d'où $f(z)=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}s_n a^n\frac{1}{z^n}+s_0+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{s_n}{b^n}z^n$ et le résultat.

A présent gardons R_2 nul et faisons tendre R_1 vers l'infini en supposant que f est bornée au voisinage de l'infini : il existe alors un nombre M et un nombre r tels que que pour tout u tel que $|u-a|>r$

$$|f(u)|\le\frac{M}{r}<1.$$

Comme on peut prendre r aussi grand qu'on le souhaite, tous les termes de la forme $(u-a)^n$, $n > 0$ tendront vers 0 et il ne restera plus finalement que le terme a_0 dans la série de Laurent. Concluons donc avec le *théorème de Liouville* :

si une fonction f est holomorphe et bornée sur $\mathbb{C}$, alors elle est constante.

En fait le théorème n'a pas été publié par Liouville mais par Cauchy (1844), c'est un auteur allemand, Borchardt, qui lui a donné ce nom par erreur après l'avoir entendu énoncer par Liouville en 1847.

Une conséquence intéressante de ce théorème est que si f n'est pas constante, elle prendra toujours une valeur infinie quelque part sur $\mathbb{C}$.

2-7 : ***Représentation par des intégrales***

Supposons qu'une fonction $g(z, t)$ soit définie pour z sur U, ouvert non vide de $\mathbb{C}$ et t dans I, intervalle de $\mathbb{R}$; soit alors f, définie a priori pour chaque z de U, par $f(z)=\int_I g(z,t)dt$. Si pour chaque t de I $g(z, t)$ est holomorphe, f est-elle holomorphe sur U ?

Pour cela il faut que f soit au moins continue, i.e. pour une suite z_n de U qui tend vers z dans U, alors $\lim_{n\to\infty} f(z_n)=\lim_{n\to\infty}\int_I g(z_n,t)dt=\int_I \lim_{n\to\infty} g(z_n,t)dt=\int_I g(z,t)dt=f(z)$.

La deuxième égalité est assurée si $|g(z,t)|\le M(t)$ avec $\int_I M(t)dt<\infty$ grâce au théorème de la convergence dominée de Lebesgue.

Posons $h(x,y)=f(x+iy)=\int_I g(x+iy,t)dt$; comme g est holomorphe pour tout t, les dérivées partielles $\frac{\partial g}{\partial x}$ et $\frac{\partial g}{\partial y}$ existent ; il faut donc pouvoir dériver sous le signe somme (*), soit que les dérivées partielles de g soient continues dans U ; on a alors

$$\frac{\partial h}{\partial x}+i\frac{\partial h}{\partial y}=\int_I \frac{\partial g}{\partial x}(z,t)+i\frac{\partial g}{\partial y}(z,t)dt$$

ce qui permet de prouver l'holomorphie de f.

Conclusion : les conditions sont donc que $g(z, t)$ soit holomorphe dans U pour chaque t de I, et qu'il existe une fonction $M(t)$ positive telle que $|g(z,t)|\le M(t)$ avec $\int_I M(t)dt<\infty$. A priori il semblerait que la continuité des dérivées partielles de g soit nécessaire, mais en fait le théorème s'énonce pour une fonction g simplement mesurable (l'opération de moyennage par l'intégrale assurant alors la continuité de f).

Finalement le théorème est le suivant :

Soit U une partie ouverte non-vide de $\mathbb{C}$, I un intervalle de $\mathbb{R}$ et g mesurable telle que

* $g(z, t)$ soit holomorphe pour tout t de I,
* $g(z, t)$ soit mesurable pour tout z de U,
* Le module de g est majoré pour tout z de U par une fonction $M(t)$ dont l'intégrale sur I est finie.

Alors f définie par $f(z)=\int_I g(z,t)dt$ est holomorphe dans U et $f^{(k)}(z)=\int_I \frac{\partial^k}{\partial z^k}g(z,t)dt$. Par ailleurs si γ est un chemin continu par morceaux dans U, alors $\int_\gamma f(z)dz=\int_I\left\{\int_\gamma g(z,t)dz\right\}dt$.

(*) Pour la dérivation sous le signe somme, voir
http://perso.wanadoo.fr/christian.squarcini/AgregInterne/Suitesfonctions/2_5.pdf

2-8 : ***Pôles et fonctions méromorphes***

Au voisinage de a, la série de Laurent de f est donc $f(u)=\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(u-a)^n$ dans lequel les termes d'indice négatif peuvent apparaître un certain nombre de fois, appelons ce nombre n_a (*ordre* du pôle a) ; plusieurs cas se présentent :

* $n_a=0$: en fait tous les c_n, $n<0$ sont nuls, c'est le cas du théorème de Riemann ;

* n_a fini : on dit que a est un *pôle* de f, d'ordre n_a ;

* n_a infini : a est une *singularité essentielle* de f.

Un exemple important du premier cas est celui de la fonction $\begin{cases}\dfrac{f(u)-f(a)}{u-a} \text{ si } u\neq a\\ f'(a) \text{ si } u=a\end{cases}$.

Dans le deuxième cas, il est clair qu'en multipliant f par $(u-a)^{n_a}$ on obtient une fonction g dont le pôle a a disparu, g est alors holomorphe au voisinage de a.

Supposons que l'ensemble des pôles de f soit un ensemble S fermé et fini dans U ; si pour les points de $U-S$ la fonction f devient holomorphe, on dira que f est *méromorphe*. Remarquons tout de suite que pour une fonction holomorphe f sur U dont les zéros forment un ensemble Z, la fonction $F=1/f$ est méromorphe sur U.

Une manière relativement simple de voir si une singularité est un pôle ou une singularité essentielle est de déterminer sa limite en a. Si $\lim_{u\to a}|f(u)|=+\infty$ alors a est un pôle ; si cette limite n'existe pas alors a est une singularité essentielle.

Deux exemples : prenons la fonction $f(u)=\dfrac{1}{u-a}$ et plaçons nous sur $U=\{u\in\mathbb{C}/|u|>|a|\}$, nous pouvons alors écrire facilement que

$$f(u)=\frac{1}{u}\frac{1}{1-\frac{a}{u}}=\frac{1}{u}\sum_{n\geq 0}\frac{a^n}{u^n}=\sum_{n\leq -1}a^{-n}u^n \quad ;$$

il y a une infinité de termes d'indices négatifs et le développement obtenu l'est en $a=0$, ce qui dans U n'a aucun sens…

Par contre le développement de f au voisinage de a donne simplement

$$f(u)=\frac{1}{u-a}=(u-a)^{-1}\ldots$$

Prenons maintenant la fonction (dite de Cauchy) $f(z)=e^{1/z}$; au voisinage de 0 cette fonction oscille indéfiniment et passe par tous les points du plan complexe, elle n'a donc pas de limite en 0 qui est une singularité essentielle.

2-9 : ***Résidus***

Considérons f holomorphe sur $U-S$ et la boule ouverte $B(a,R)$, $R>0$ où a est dans S ; supposons également que nous connaissions la série de Laurent de f pour u dans B :

$$f(u)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}c_n(u-a)^n,\ c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz$$

alors

$$c_{-1}=\frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)dz$$

où C est un cercle de centre a, de rayon $r<R$.

La conclusion est que l'on obtient « sans calcul » l'intégrale de f sur un contour γ, image continûement déformée du cercle C uniquement grâce à la connaissance du coefficient c_{-1} !

Ce coefficient est appelé le *résidu* de f en a, noté Res(f, a).

D'une manière plus générale si on a n pôles (a_i) dans S et γ un chemin fermé ne rencontrant aucun point de S, alors l'intégrale de f sur γ est la somme de ses résidus en a_i en tenant compte de l'indice de γ pour chaque a_i (formule de Cauchy):

$$\int_\gamma f(z)dz = 2i\pi \sum_{a_i \in S} \text{Res}(f, a_i) I_\gamma(a_i).$$

(on découpe le chemin γen multiples sous-chemins).

Dans ce que nous venons de dire l'ordre du pôle n'intervient pas, or souvent le calcul ne pourra se faire simplement à cause des autres termes d'indice négatif de la série de Laurent ; pour faire disparaître ces termes désobligeants nous pouvons dériver une fois de moins que l'ordre du pôle la fonction $(u-a)^{n_a} f(u)$, ce qui nous donnera accès à c_{-1} directement :

$$\text{Re}\,s(f, a) = \frac{1}{(n_a - 1)!} \lim_{u \to a} \frac{d^{n_a - 1}}{du^{n_a - 1}} (u-a)^{n_a} f(u).$$

Remarque : si un pôle a pour ordre 1, le résidu de f à ce pôle est obtenu en faisant simplement $\lim_{z \to a} (z-a) f(z)$.

2-10 : ***Calcul d'intégrales immondes***

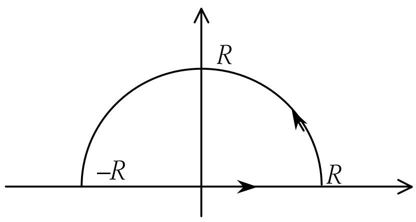
(cette expression est due à Walter Appel…)

Exemple 1 : commençons par une fonction simple dont nous savons calculer l'intégrale :

$$f(z) = \frac{1}{z^2+1}$$

qui a deux pôles simples en i et $-i$; on a alors Res(f, i) $= \lim_{z \to i} (z-i) \frac{1}{z^2+1} = \lim_{z \to i} \frac{1}{z+i} = \frac{1}{2i}$ et $\text{Re}\,s(f, -i) = -\frac{1}{2i}$.

Cherchons par exemple $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$ (qui vaut $\arctan(+\infty) = \frac{\pi}{2}$), nous prenons le chemin suivant



Le point i est à l'intérieur du chemin et $\text{Res}(f, i) = \frac{1}{2i} \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{2i\pi}{2i} = \pi$ d'où le résultat. On aurait pu passer par en-dessous, mais on aurait tourné dans l'autre sens, ce qui aurait donné $2i\pi \frac{-1}{2i}(-1) = \pi$; par ailleurs on aurait pu prendre un quart de cercle directement, mais dans ce cas i aurait été sur le contour !

Exemple 2 : évaluation de certaines intégrales prises entre $-\infty$ et $+\infty$.

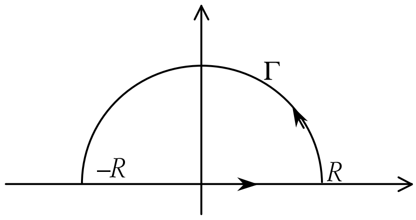
Soit $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ où

- (i) f est analytique lorsque la partie imaginaire de z est positive ou nulle (à part pour un nombre fini de pôles)

- (ii) f n'a pas de pôles sur l'axe réel et

- (iii) lorsque $|z| \to +\infty$, $zf(z) \to 0$ uniformément pour toutes les valeurs de z pour lesquelles $0 \le \arg(z) \le \pi$, sous réserve que

- (iv) lorsque x est réel et tend vers $\pm\infty$, $xf(x) \to 0$, de sorte que $\int_{-\infty}^{0} f(x)dx$ et $\int_{0}^{+\infty} f(x)dx$ convergent.



Nous choisissons un contour C du type de celui considéré dans l'*exemple 1*, constitué du segment $[-R\,;R]$ et du demi-cercle Γ de centre O, de rayon R. On a donc $\int_C f(z)dz = 2\pi i \sum_{a_i \in S} \mathrm{Res}(f, a_i) I_C(a_i)$ où les a_i sont les pôles au-dessus de l'axe réel ; on a donc

$$\left| \int_{-R}^{+R} f(z)dz - 2\pi i \sum_{a_i \in S} \mathrm{Res}(f, a_i) I_C(a_i) \right| = \left| \int_{\Gamma} f(z)dz \right| = \left| \int_0^{\pi} f(Re^{i\theta}) Rie^{i\theta} d\theta \right|.$$

La condition (iii) se traduit par le fait que nous donnant ε, nous pouvons choisir R_0, indépendamment de $\arg z$, tel que $|zf(z)| < \dfrac{\varepsilon}{\pi}$ lorsque $|z| > R_0$ et $0 \le \arg(z) \le \pi$; on peut donc majorer la dernière intégrale :

$$\left| \int_0^{\pi} f(Re^{i\theta}) Rie^{i\theta} d\theta \right| < \int_0^{\pi} \left| f(Re^{i\theta}) Rie^{i\theta} \right| d\theta = \int_0^{\pi} \left| Re^{i\theta} f(Re^{i\theta}) \right| d\theta \le \int_0^{\pi} \frac{\varepsilon}{\pi} d\theta = \varepsilon .$$

Cette dernière inégalité montre que l'intégrale sur le demi-cercle tend vers 0 à l'infini et que

$$\lim_{R \to +\infty} \int_{-R}^{R} f(z)dz = 2\pi i \sum_{a_i \in S} \mathrm{Res}(f, a_i) I_C(a_i).$$

La condition (iv) intervient maintenant car nous savons que $\lim_{R \to +\infty} \int_{-R}^{0} f(x)dx$ existe ainsi que $\lim_{R \to +\infty} \int_{0}^{R} f(x)dx$; on conclut donc à l'existence de

$$\lim_{r \to -\infty} \lim_{R \to +\infty} \int_{r}^{R} f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_{a_i \in S} \mathrm{Res}(f, a_i) I_C(a_i).$$

Ce théorème est fort utile dès que l'on cherche à calculer des intégrales du type Fourier :

$$\hat{F}(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{ikx} dx .$$

Prenons par exemple le calcul de $\int_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{e^{ikx}}{x^2 + a^2} dx$: les pôles sont $-ia$ et ia dont seul le deuxième est dans C ; on a donc

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ikx}}{x^2 + a^2} dx = 2\pi i \,\mathrm{Res}\left(\frac{e^{ikz}}{z^2 + a^2}, ia \right) = 2\pi i \lim_{z \to ia} (z - ia) \frac{e^{ikz}}{z^2 + a^2} = 2\pi i \lim_{z \to ia} \frac{e^{ikz}}{z + ia} = 2\pi i \frac{e^{-ka}}{2ia} = \frac{\pi}{a} e^{-ka}.$$

En fait on sait que la T.F. de $\dfrac{1}{x^2+a^2}$ n'est pas tout à fait cela : c'est $\dfrac{\pi}{a}e^{-|k|a}$; la différence vient du signe de k : $z\dfrac{e^{ikz}}{z^2+a^2}$ ne tend vers 0 que si la partie réelle de ikz est négative, soit lorsque k est positif (puisque z est dans le demi-plan supérieur, $y > 0$). Lorsque k est négatif il faut procéder de manière identique mais en intégrant sur un demi-cercle situé dans le demi-plan inférieur ; on obtient alors après calcul du résidu en $-ia$, $\dfrac{\pi}{a}e^{ka}$ d'où le résultat connu.

2-11 : ***Lemme de Jordan***

En fait la condition (iii) peut être remplacée par une condition moins forte, à savoir que $f(z)$ tende vers 0 lorsque $|z|$ tend vers $+\infty$: dans la démonstration précédente on utilise la condition (iii) pour montrer que la partie de l'intégrale sur le cercle est nulle ; il suffit en fait de montrer que sous cette simple condition,

$$\left|\int_\Gamma f(z)dz\right| \to 0 \text{ lorsque } |z| \to +\infty .$$

Pour ce faire nous démontrons le *lemme de Jordan* (*Cours d'Analyse*, 1894) :

Si $f(z)$ tend vers 0 lorsque $|z| \to +\infty$ avec $0 \le \arg(z) \le \pi$ alors $\displaystyle\lim_{R\to+\infty}\left(\int_\Gamma e^{ikz}f(z)dz\right) = 0$.

En reprenant la même technique que précédemment et les mêmes notations, on a :

$$\left|\int_\Gamma e^{ikz}f(z)dz\right| = \left|\int_0^\pi e^{ik(R\cos\theta+iR\sin\theta)}f(Re^{i\theta})iRe^{i\theta}d\theta\right| \le \int_0^\pi Re^{-kR\sin\theta}\left|f(Re^{i\theta})\right|d\theta < \int_0^\pi Re^{-kR\sin\theta}\frac{\varepsilon}{\pi}d\theta .$$

La fonction à intégrer est symétrique par rapport à $\dfrac{\pi}{2}$, d'où la dernière intégrale vaut

$$2\int_0^{\pi/2} Re^{-kR\sin\theta}\frac{\varepsilon}{\pi}d\theta = \frac{2\varepsilon}{\pi}\int_0^{\pi/2} Re^{-kR\sin\theta}d\theta .$$

Par ailleurs sur $\left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$ on a $\sin\theta \ge \dfrac{2\theta}{\pi}$, soit $-kR\sin\theta \le -\dfrac{2kR\theta}{\pi} \Rightarrow e^{-kR\sin\theta} \le e^{-\frac{2kR\theta}{\pi}}$ et

$$\int_0^{\pi/2} Re^{-kR\sin\theta}d\theta \le \int_0^{\pi/2} Re^{\frac{-2kR\theta}{\pi}}d\theta = -\frac{\pi}{2kR}R\left[e^{\frac{-2kR\theta}{\pi}}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{\pi}{2k}\left(e^{-kR}-1\right) = \frac{\pi}{2k}\left(1-e^{-kR}\right)$$

d'où la majoration finale : $\displaystyle\int_0^\pi Re^{-kR\sin\theta}\frac{\varepsilon}{\pi}d\theta \le \frac{2\varepsilon}{\pi}\frac{\pi}{2k}\left(1-e^{-kR}\right) < \frac{\varepsilon}{k}$ et donc le résultat.

Le lecteur intéressé par davantage de développements aura intérêt à consulter [Whi] ou [Cha].

Exemple 3 : évaluation de certaines intégrales de la forme $\displaystyle\int_0^{2\pi} R(\cos\theta,\sin\theta)d\theta$ où R est une fonction rationnelle de cos et sin.

Posons $e^{i\theta} = z$, soit $\cos\theta = \dfrac{1}{2}\left(z+\dfrac{1}{z}\right)$ et $\sin\theta = \dfrac{1}{2i}\left(z-\dfrac{1}{z}\right)$, l'intégrale devient de la forme $\displaystyle\int_C S(z)dz$ où S est une fonction rationnelle de z et C le cercle trigonométrique. Par conséquent l'intégrale est égale à $2\pi i$ fois la somme des résidus de S aux pôles situés à l'intérieur de C.

Prenons par exemple $0<r<1$ et cherchons $\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{1-2r\cos\theta+r^2}=\int_C\frac{dz}{i(1-rz)(z-r)}$. Le seul pôle à l'intérieur du cercle est $z=r$, d'ordre 1, dont le résidu est obtenu en faisant $\lim_{z\to r}\frac{(z-r)}{i(1-zr)(z-r)}=\frac{1}{i(1-r^2)}$.

On a donc $\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{1-2r\cos\theta+r^2}=\frac{2\pi i}{i(1-r^2)}=\frac{2\pi}{(1-r^2)}$.

Pour d'autres exemples, voir [App], pp 94 et sq.

Il faut bien voir que la méthode des résidus n'est appropriée que dans certaines situations : si on souhaite calculer des intégrales définies classiques la méthode n'apporte guère d'amélioration, par contre dans le cas d'intégrales indéfinies (sur $\mathbb{R}$ par exemple) en choisissant correctement le chemin d'intégration on peut obtenir des choses intéressantes.

3. Transformations conformes

3-1 : ***Une fonction holomorphe est une application conforme***

Le théorème fondamental sur la question est qu'une fonction holomorphe est une *transformation conforme*, i.e. l'image d'un angle de mesure α par f est un angle de mesure α.

Considérons $z'=f(z)$ holomorphe dans un domaine (ouvert connexe) U dans lequel sa dérivée $f'(z)$ ne s'annule pas. Appelons z_0 l'affixe d'un point M_0 de U, z celle d'un point M, et P_0 et P les points d'affixes z_0' et z' ; on a dans le repère orthonormal $(O\,;\vec{u},\vec{v})$:

$$|z-z_0|=\left\|\overrightarrow{MM_0}\right\| \text{ et } \left(\vec{u};\overrightarrow{MM_0}\right)=\arg(z-z_0)\ ;$$

dans le repère orthonormal $(O'\,;\vec{u}',\vec{v}')$: $|z'-z_0'|=\left\|\overrightarrow{PP_0}\right\|$, $\left(\vec{u}';\overrightarrow{PP_0}\right)=\arg(z'-z_0')$; moyennant quelques petites manipulations géométriques on peut s'arranger pour que O' vienne en O et que $\vec{u}'$ ait même direction et même sens que $\vec{u}$ d'où $\left(\vec{u};\overrightarrow{PP_0}\right)=\arg(z'-z_0')$.

Reprenons la définition du nombre dérivé en z_0 :

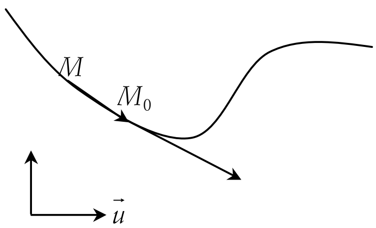
$$f'(z_0)=\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}=\lim_{z\to z_0}\frac{z'-z_0'}{z-z_0}=|f'(z_0)|\exp[i\arg(f'(z_0))]$$

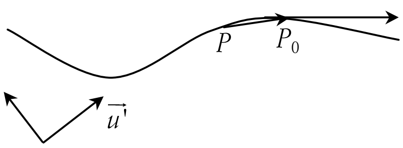
$$=\lim_{|z|\to|z_0|}\frac{\left\|\overrightarrow{PP_0}\right\|}{\left\|\overrightarrow{MM_0}\right\|}\lim_{\arg(z)\to\arg(z_0)}\exp\left[i\arg\left(\frac{z'-z_0'}{z-z_0}\right)\right];$$

posons $\lim\limits_{z\to z_0}\arg\left(\dfrac{z'-z_0'}{z-z_0}\right)=\lim\limits_{z\to z_0}\left(\vec{u}'\,;\overrightarrow{PP_0}\right)-\left(\vec{u}\,;\overrightarrow{MM_0}\right)=\omega_0+2k\pi=\arg(f'(z_0))$.

Supposons que le point M décrive une courbe γ passant par M_0 et qu'en ce point γ ait une tangente de vecteur directeur $\vec{t}$; son image P décrira une courbe Γ ayant une tangente en P_0 de vecteur directeur $\vec{t}'$. Si l'on prend sur Γ le sens de parcours positif correspondant à celui de M sur γ, alors en posant $\left(\vec{u}\,;\vec{t}\right)=\alpha$, on a $\left(\vec{u}'\,;\vec{t}'\right)=\alpha+\omega_0+2k\pi$. L'angle formé par la tangente à γ et celui formé par la tangente à Γ sont identiques.

Comme ceci est valable pour toute courbe passant en M_0, la transformation f est conforme : tout angle au voisinage de M_0 étant transformé en un angle de mesure identique, simplement tourné de $\omega_0=\arg(f'(z_0))$.





Réciproquement considérons une courbe γ, rectifiable (sa longueur est calculable), passant par M_0 ainsi que Γ sa courbe transformée par f. Le rapport $\dfrac{z'-z_0'}{z-z_0}$ tend uniformément vers $f'(z_0)$, on a donc pour deux points M et M_1 d'images P et P_1 :

$$\left\|\overrightarrow{PP_1}\right\|=\left\|\overrightarrow{MM_1}\right\|\left(|f'(z_0)|+\varepsilon(z,z_1)\right)$$

où $\varepsilon(z,z_1)$ tend uniformément vers 0 lorsque $M(z)$ et $M_1(z_1)$ tendent vers M.

Les lignes polygonales $[MM_1]$ inscrites dans γ ont une longueur bornée puisque γ est rectifiable, il en est donc de même pour Γ qui est par conséquent également rectifiable. Le rapport de la longueur de l'arc $\widehat{PP_0}$

à celle de l'arc $\widehat{MM_0}$ est $\left(|f'(z_0)|+\varepsilon(z)\right)$, avec $\varepsilon(z)$ tendant vers 0 lorsque M tend vers M_0, donc ce rapport tend vers $|f'(z_0)|$ uniformément.

Comme on pouvait s'y attendre lorsqu'on passe du voisinage de z_0 à celui de z_0', f se comporte comme une similitude directe.

3-2 : *L'inverse local*

Le fait de considérer f localement comme une similitude permet d'envisager sa réciproque en n'importe quel point : on a alors l'équivalent du théorème des fonctions implicites, dit également *théorème de l'inverse local* :

Si $z'=f(z)$ est holomorphe en $M(z)$, de dérivée non nulle dans un domaine D, alors le point $P(z')$ décrit un domaine D' où f est bijective. La transformation réciproque f^{-1} est alors holomorphe et $\frac{df^{-1}(z')}{dz'}=\frac{1}{f'(z)}$ comme dans le cas réel.

Comme f est holomorphe, on a en appelant U et V les parties réelles et imaginaires de f : $\frac{\partial U}{\partial x}=\frac{\partial V}{\partial y}$ et $\frac{\partial U}{\partial y}=-\frac{\partial V}{\partial x}$, soit $f'(z)=\frac{\partial U}{\partial x}+i\frac{\partial V}{\partial x}=-i\left(\frac{\partial U}{\partial y}+i\frac{\partial V}{\partial y}\right)$.

On peut écrire

$$|f'(z)|^2=\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2=\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 \text{ et } \arg(f'(z))=\arg\left(\frac{\partial U}{\partial x}+i\frac{\partial V}{\partial x}\right)=-\frac{\pi}{2}+\arg\left(\frac{\partial U}{\partial y}+i\frac{\partial V}{\partial y}\right).$$

Prenons une ligne de niveau $U(x, y)=\text{cte}$, alors sur cette courbe

$$|f'(z)|=\left|\frac{\partial V}{\partial x}\right|=\left|\frac{\partial V}{\partial y}\right| \text{ et } \arg(f'(z))=\frac{\pi}{2}+\arg\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)=\arg\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)$$

ce qui signifie que les courbes $U(x, y)=\text{cte}$ sont orthogonales aux courbes $V(x, y)=\text{cte}$ de même que les courbes $|f(z)|=\text{cte}$ sont orthogonales aux courbes $\arg(f(z))=\text{cte}$.

3-3 : *La fonction homographique*

On appelle fonction homographique la fonction $z'=f(z)=\frac{az+b}{cz+d}$ où a, b, c et d sont des constantes complexes et $ad-bc\neq 0$. Cette fonction est bijective, de réciproque $f^{-1}(z')=\frac{b-dz'}{cz'-a}$.

Si on fait tendre z vers $-\frac{d}{c}$, le module de z' tend vers l'infini ; réciproquement si $|z'|\to\infty$, z a pour limite $-\frac{d}{c}$. On considèrera donc que le plan complexe a un *unique point à l'infini*, ce qui permet de conserver la bijectivité de f dans tous les cas.

Comme on l'a vu dans le livre, on peut écrire $z'=f(z)=\frac{a}{c}+\frac{bc-ad}{c^2}\frac{1}{z+\frac{d}{c}}$, ce qui montre que f se décompose en une série de transformations simples : $z\to z+\frac{d}{c}$ par la translation de vecteur $\frac{d}{c}$, $z+\frac{d}{c}\to\frac{1}{\overline{z+\frac{d}{c}}}$ par une inversion de pôle O, de puissance 1, $\frac{1}{\overline{z+\frac{d}{c}}}\to\frac{1}{z+\frac{d}{c}}$ par la réflexion d'axe (Ox), enfin une similitude directe et une translation couronnent le tout. Cette transformation est conforme : la composée de l'inversion et de la réflexion ne change pas le sens des angles, les autres transformations étant conformes évidemment.

La transformée d'une droite est un cercle ou une droite, celle d'un cercle est un cercle ou une droite (propriétés de l'inversion).

La fonction *f* conserve le birapport (ou *rapport anharmonique*) : soient $(z_i)_{i=1..4} \to (z_i')_{i=1..4}$ alors

$$\frac{z_4'-z_1'}{z_4'-z_2'}:\frac{z_3'-z_1'}{z_3'-z_2'}=\frac{z_4-z_1}{z_4-z_2}:\frac{z_3-z_1}{z_3-z_2}$$

(le calcul est simple à faire ; lorsque l'un des points est à l'infini un des deux rapports devient égal à 1).

Comme f est déterminée par 3 paramètres (on peut tout diviser par exemple par a ou n'importe quel coefficient non nul), seuls trois points sont nécessaires pour déterminer *f* et on peut l'obtenir par exemple par

$$(\mathbf{1})\quad \frac{f(z)-z_1'}{f(z)-z_2'}:\frac{z_3'-z_1'}{z_3'-z_2'}=\frac{z-z_1}{z-z_2}:\frac{z_3-z_1}{z_3-z_2}.$$

Points invariants : on a $f(z)=z \Leftrightarrow cz^2+(d-a)z-b=0$ qui est du second degré si *c* n'est pas nul (sinon on a une similitude avec un unique point invariant ω ; on peut néanmoins considérer qu'il y a un deuxième point double à l'infini). Bref, avec $c\neq 0$ on a deux racines z_1 et z_2, affixes de deux points *A* et *B*. Supposons ces points distincts : (**1**) nous donne

$$(\mathbf{2})\quad \frac{f(z)-z_1}{f(z)-z_2}=k\frac{z-z_1}{z-z_2}$$

où *k* est constant, différent de 1 ; *k* est appelé le *multiplicateur*.

Posons $k=\rho e^{i\theta}$, alors (**2**) se traduit géométriquement par :

$$\frac{AP}{BP}=\rho\frac{AM}{BM} \text{ et } \left(\overrightarrow{BP},\overrightarrow{AP}\right)=\theta+\left(\overrightarrow{BM},\overrightarrow{AM}\right)(2\pi).$$

Si *k* est réel, alors $\theta=0(\pi)$, la deuxième égalité montre que *A*, *B*, *M* et *P* sont cocycliques : sur le même arc $\overset{\frown}{AB}$ lorsque *k* est positif, sur des arcs opposés lorsque $k<0$.

Lorsque $\rho=1$, on a de plus $\frac{AP}{BP}=\frac{AM}{BM}$, *M* et *P* sont sur un même cercle, lieu des points dont le rapport des distances à *A* et *B* est donné : c'est un cercle du faisceau dont *A* et *B* sont les points limites ou *points de Poncelet*. Il coupe la droite (*AB*) en deux points diamétralement opposés, conjugués harmoniques par rapport à *A* et *B*.

Dans le cas général on peut considérer f comme le produit de ces deux transformations : on effectue d'abord la transformation sur *M* correspondant à $k'=\rho$, puis celle correspondant à $k''=e^{i\theta}$.

Itérations : dans le cas des similitudes on connaît bien le résultat de l'itération de *f* : on obtient les spirales logarithmiques.

Ici la relation $\frac{f(z)-z_1}{f(z)-z_2}=k\frac{z-z_1}{z-z_2}$ envoie immédiatement à $\frac{f^n(z)-z_1}{f^n(z)-z_2}=\frac{z_n-z_1}{z_n-z_2}=k^n\frac{z-z_1}{z-z_2}$ ce qui permet de calculer une expression du terme z_n : $z_n=\frac{(z_1-z_2k^n)z-z_1z_2(1-k^n)}{(1-k^n)z-(z_2-z_1k^n)}$.

Prenons $\rho=|k|<1$: $k^n\to 0$, $z_n\to\frac{z_1z-z_1z_2}{z-z_2}=z_1$; quelque soit le point de départ (sauf z_2) la suite tend uniformément (à cause de la suite géométrique) vers z_1 (*A* est *attractif* et *B* est *répulsif*) ; si on a $\rho=|k|>1$ la situation est inversée entre z_1 et z_2 ; si $\rho=|k|=1$, la suite tourne indéfiniment sur le cercle passant par z et appartenant au faisceau dont *A* et *B* sont les points de Poncelet, à condition que θ soit incommensurable avec π. Les cas particuliers sont laissés au lecteur (points fixes doubles, $c=0$).

3-4 : ***Transformations et géométrie de Poincaré***

Nous avons dit qu'il suffisait de trois points $M(z)$ et de leurs images $P(z')$ pour caractériser les transformations homographiques. Les trois points M sont soit alignés, soit sur un cercle ; si on prend alors les points P correspondants sur la droite ou le cercle, cet ensemble de points sera globalement invariant par la transformation considérée. Mettons qu'il s'agisse d'un cercle : les points à l'intérieur du cercle sont envoyés à l'intérieur ou à l'extérieur dudit cercle (dans le cas d'une droite on agira sur des demi-plans).

Cherchons par exemple les transformations conservant le demi-plan H : $y > 0$ ou *demi-plan de Poincaré*.

Ces transformations doivent conserver la frontière (Ox) : si $z = 0$ ou ∞, z' doit être réel et réciproquement. a, b, c et d doivent alors être réels dès que l'un d'eux est réel. On a alors avec $z = x + iy \to z' = x' + iy'$:

$$y' = y\frac{ad - bc}{\left|cz + d\right|^2}.$$

Pour que y' soit dans H, il faut $ad - bc > 0$. On peut alors supposer que $ad - bc = 1$ avec a, b, c, d réels : ces transformations ont été appelées *transformations fuchsiennes* par Poincaré, c'est une sous-classe des *fonctions automorphes*.

Lorsque les points doubles sont symétriques par rapport à (Ox), le multiplicateur k de (**2**) est tel que $\left|k\right| = 1$; la transformation est dite *elliptique*. Lorsque les points doubles sont sur (Ox) et distincts, le multiplicateur k de (**2**) est réel ; la transformation est dite *hyperbolique*. Enfin lorsque les points doubles sont sur (Ox) et confondus, la transformation est dite *parabolique*.

Invariant linéaire de Poincaré : dérivons la fonction $z' = f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$, $\frac{df}{dz} = \frac{ad - bc}{(cz + d)^2}$; le rapport de similitude de f au voisinage de M et P est alors $\left|\frac{df}{dz}\right| = \frac{\left|ad - bc\right|}{\left|cz + d\right|^2}$.

Appelons ds un élément infinitésimal de courbe rectifiable passant par M et ds' l'élément de l'arc correspondant passant par P, on a alors $\frac{ds'}{ds} = \left|\frac{df}{dz}\right| \Leftrightarrow ds' = \frac{\left|ad - bc\right|}{\left|cz + d\right|^2}ds$.

Si f est fuchsienne, on a alors $ds' = \frac{y'}{y}ds \Leftrightarrow \frac{ds'}{y'} = \frac{ds}{y}$: supposons que la courbe soit de la forme $z(t) = f(t) + ig(t)$, de dérivée continue, alors l'expression $\frac{ds}{y} = \frac{\sqrt{f'(t)^2 + g'(t)^2}}{g(t)}$ est invariante pour toutes les transformations fuchsiennes, c'est l'invariant différentiel linéaire de Poincaré. Il est alors clair que

$$(\mathbf{3}) \quad \int_{t_1}^{t_2} \frac{ds}{y}dt$$

garde la même valeur pour toutes ces transformations.

Géométrie de Poincaré : l'intégrale (**3**) peut être considérée comme donnant la longueur *non euclidienne* de l'arc de courbe $z(t) = f(t) + ig(t)$ entre t_1 et t_2. Dans ce cas les angles sont conservés ainsi que les pseudo-longueurs par toute transformation fuchsienne ; ces transformations étant caractérisées par la donnée de trois points et de leurs images, exactement comme en géométrie euclidienne standard. On dira que ce sont les *déplacements* de cette géométrie.

Prenons un arc de courbe dans H : lorsqu'il se rapproche de (Ox), sa pseudo-longueur ne reste pas finie (y tend vers 0, ds ne tend pas vers 0) ; l'axe (Ox) jouera donc le rôle de droite des points à l'infini.

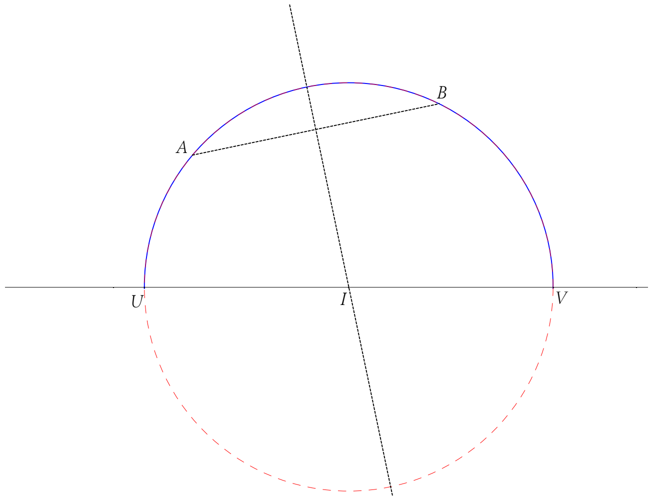
Prenons une transformation elliptique f ayant un seul point double A dans H : cette fonction jouera le rôle de *pseudo-rotation* autour de A ; dans toutes les pseudo-rotations autour de A un point M décrit un cercle du faisceau admettant pour points de Poncelet A et son symétrique A' par rapport à (Ox) : un tel cercle sera un *pseudo-cercle* de centre A.

Les cercles passant par A et A'coupent tous ces pseudo-cercles de centre A à angle droit ; ils sont centrés sur (Ox). On considèrera donc que les *pseudo-droites* sont représentées par les demi-cercles de H dont le centre est sur (Ox).

Le pseudo-cercle peut être également considéré comme lieu des points équidistants de A au sens de la distance définie en (**3**) ; par ailleurs le pseudo-centre Ω d'un pseudo-cercle est le point commun aux pseudo-droites qui lui sont orthogonales.

On a donc défini dans notre nouvelle géométrie les (pseudo) éléments de base (qui seront notés en italique) : *droites*, *cercles*, *angles*, *distances* et *déplacements* et il n'y a pas de contradiction :

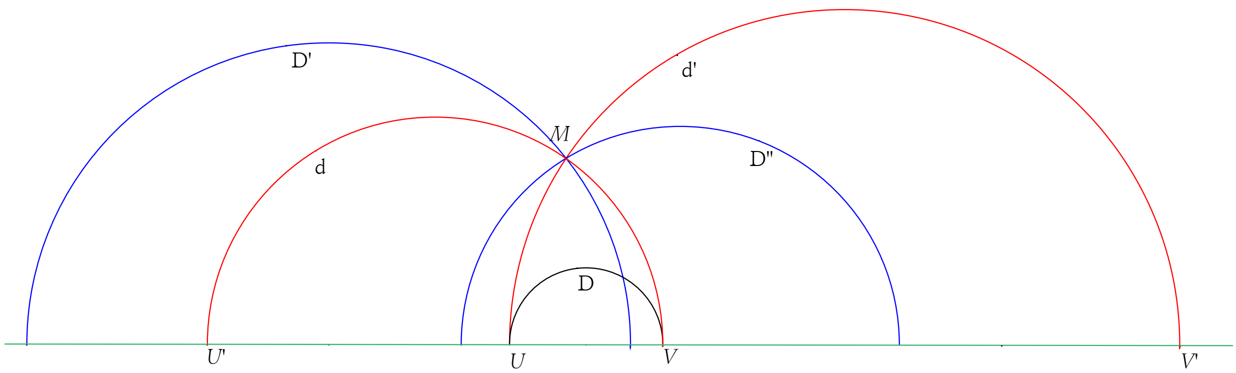
* deux points déterminent une *droite* (un demi-cercle centré sur (Ox)) ;



* les points à l'infini d'une *droite* D sont les points U et V situés sur (Ox) ;

* si M est un point extérieur à D, par M passent des *droites* D' qui coupent D, des *droites* D'' non sécantes et deux *droites* d et d' *parallèles* à D, coupant D à l'infini ;

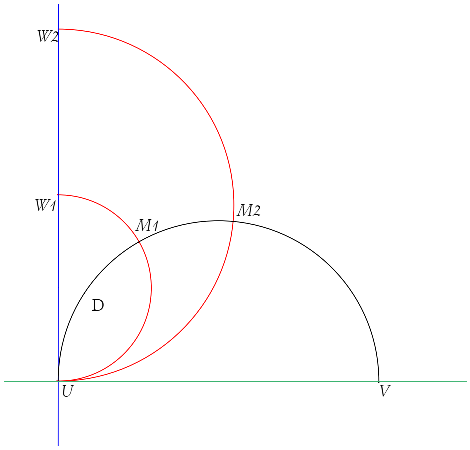
* les droites D'' sont comprises dans l'*angle* de ces *parallèles.*



* Par M ne passe qu'une seule *perpendiculaire* à D (le demi-cercle orthogonal en M à D) ;

* le lieu des points équidistants de D d'un côté de D n'est pas une *droite* car c'est un arc de cercle euclidien passant par U et V.

Précisons la *distance* de deux points M_1 et M_2 :



La *droite* D passant par ces deux points coupe (Ox) en U et V ; on peut par une transformation homographique judicieuse (parabolique) transformer D en la *droite* coupant (Ox) en U et au point à l'infini (en fait une droite euclidienne) ; M_1 et M_2 ont pour images W_1 et W_2 ; le birapport

$$[M_1, M_2, U, V] = [z_1, z_2, \alpha, \beta] = \frac{z_1-\alpha}{z_2-\alpha} : \frac{z_1-\beta}{z_2-\beta}$$

est conservé et après transformation devient

$$[z_1, z_2, \alpha, \beta] = [W_1, W_2, U, \infty] = [f(z_1), f(z_2), \alpha, \infty] = \frac{f(z_1)-\alpha}{f(z_2)-\alpha}.$$

La *distance* $d(W_1, W_2)$ vaut alors $\left|\int_{t_1}^{t_2} \frac{ds}{y}dt\right| = \left|\int_{Y_1}^{Y_2} \frac{dy}{y}dt\right| = \left|\ln\frac{Y_1}{Y_2}\right|$ où Y_1 et Y_2 sont les parties imaginaires de $f(z_1)$ et $f(z_2)$; mais comme U, W_1 et W_2 sont alignés, on a $\frac{f(z_1)-\alpha}{f(z_2)-\alpha} = \frac{iY_1}{iY_2} = \frac{Y_1}{Y_2}$ d'où

$$d(W_1, W_2) = \ln\left|[f(z_1), f(z_2), \alpha, \infty]\right| \Rightarrow d(M_1, M_2) = \left|\ln[z_1, z_2, \alpha, \beta]\right|.$$

Il est assez facile de montrer que

$$d(M_1, M_2) = \psi(r) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+r}{1-r}\right),\ r = \left|\frac{z_1-z_2}{1-z_1\overline{z_2}}\right|,\ 0 \le r < 1.$$

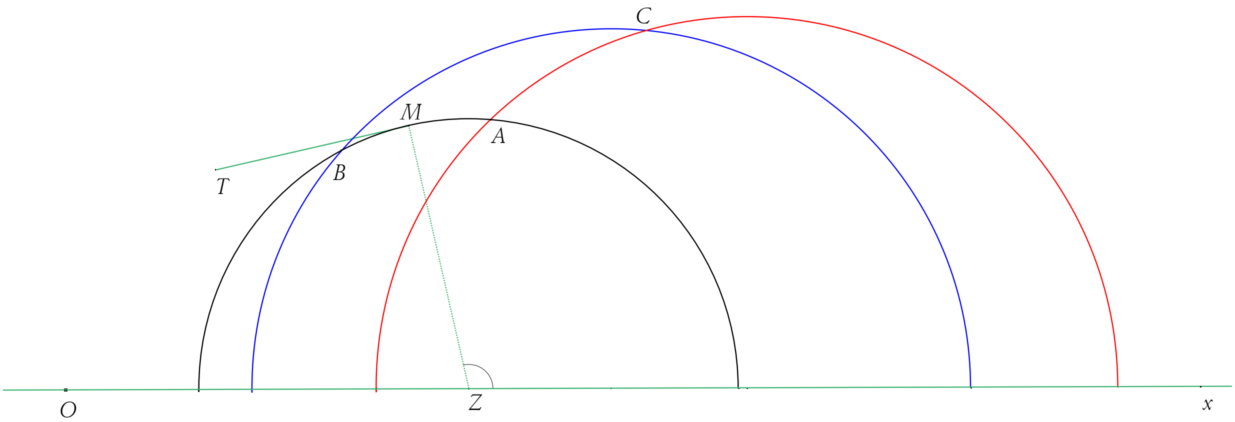
Comme la fonction ψ est croissante sur $[0\,;1[$ avec $\psi(0)=0$ et $\lim_{r\to 1}\psi(r) = +\infty$, on a $d\left(f(z_1), f(z_2)\right) \le d(z_1, z_2)$: une interprétation amusante est alors que $d(W_1, W_2)$ étant la plus petite possible quand les points sont alignés, la conservation du birapport fait que $d(M_1, M_2)$ est la plus petite possible et donc que la distance la plus courte d'un point à un autre est la « ligne droite », même quand la ligne droite est courbe comme ici…

Surfaces : il est clair que dans la géométrie décrite ci-dessus il sera impossible de calculer les aires à partir de carrés ou de rectangles ainsi qu'on en a l'habitude… Par contre l'élément de longueur $\frac{ds}{y}$ restant invariant, on peut considérer l'élément de surface $\frac{dx}{y}\frac{dy}{y} = \frac{dxdy}{y^2}$ qui restera invariant par nos transformations homographiques, c'est-à-dire par les *déplacements* (en fait on considère que les petits arcs de cercle sont des segments de droite). L'aire d'un domaine vaut alors $\iint \frac{dxdy}{y^2}$ ou encore avec la formule de Green-Riemann : $\int_{C^+} \frac{dx}{y}$, C^+ représentant la courbe délimitant le domaine, supposée rectifiable et parcourue dans le sens positif.

Appliquons ceci à un *triangle* ABC : soit un point M de l'arc $\overset{\frown}{AB}$ tel que $\left(Ox, \overline{ZM}\right)=\theta$ où Z est le centre de la *droite* (AB), la portion de $\int_{C^+}\frac{dx}{y}$ relative à $\overset{\frown}{AB}$ sera égale à la variation de $-\theta$ (attention au sens de parcours) ; la demi-tangente positive sur $\overset{\frown}{AB}$, $[MT)$ va faire un tour complet sur elle-même en parcourant tout le triangle, soit un angle de 2π ; par ailleurs la variation de l'angle de cette demi-tangente avec (Ox) est égale à celle de θ : quand elle passe de l'arc $\overset{\frown}{AB}$ à l'arc $\overset{\frown}{BC}$ elle tourne de $\pi-\hat{B}$, de $\overset{\frown}{BC}$ à $\overset{\frown}{CA}$ elle tourne de $\pi-\hat{C}$ et de $\overset{\frown}{CA}$ à $\overset{\frown}{AB}$ de $\pi-\hat{A}$; au total cette demi-tangente a tourné de $3\pi-(\hat{A}+\hat{B}+\hat{C})$. On a donc

$$\int_{C^+}\frac{dx}{y}=-\left[2\pi-\left(3\pi-\hat{A}-\hat{B}-\hat{C}\right)\right]=\pi-\left(\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}\right).$$

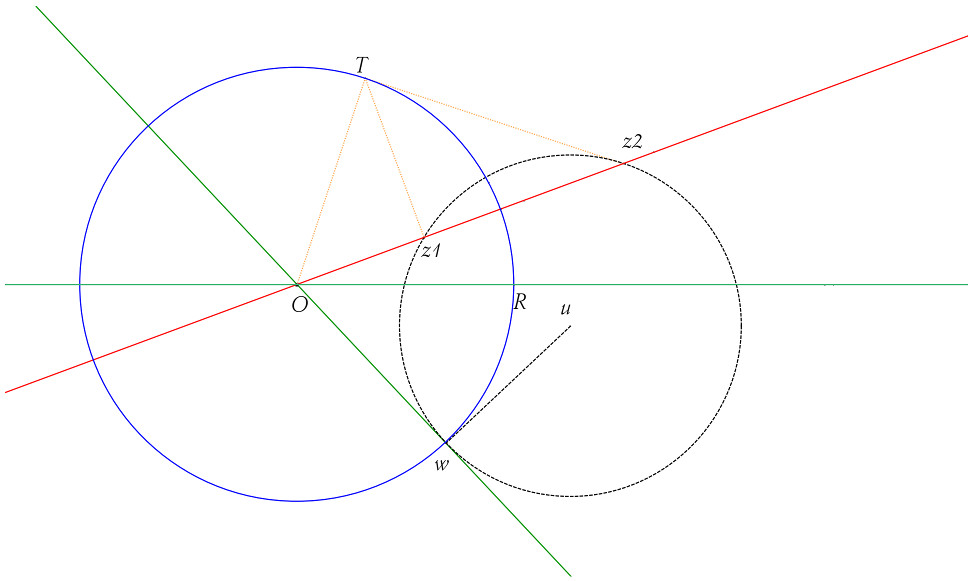
Les angles sont évidemment pris entre les tangentes à l'intérieur du triangle ; la somme de ces angles est alors inférieure à π puisque l'aire est positive.



3-5 : ***Transformations du cercle***

Terminons cet aperçu avec quelques propriétés de certaines transformations homographiques que l'on retrouve fréquemment.

Prenons un cercle C de centre O, de rayon R et une homographie f conservant l'intérieur de C (un point intérieur à C retourne à l'intérieur de C). z_1 et z_2 sont les deux points dont les images sont 0 et ∞ par f ; f laisse invariant le cercle C ; toute droite passant par O est orthogonale à C, les cercles antécédents passant par z_1 et z_2 doivent être orthogonaux à C (le lecteur se fera une joie de faire les démonstrations nécessaires en utilisant les propriétés de l'inversion…).



Les points z_1 et z_2 sont inverses l'un de l'autre et on a $\overrightarrow{OM_1}.\overrightarrow{OM_2} = R^2 \Leftrightarrow z_2.\overline{z_1} = R^2$. On obtient ainsi que

$$f(z) = \lambda\frac{z - z_1}{z - z_2} = \mu\frac{z - z_1}{R^2 - z\overline{z_1}} \text{ avec } \mu = -\lambda\overline{z_1}.$$

λ est une constante complexe telle que $|f(z)| = R$ lorsque $|z| = R$: en prenant $z = R$, on a $|f(R)| = \left|\mu\frac{R - z_1}{R^2 - R\overline{z_1}}\right| = |\mu|\frac{|R - z_1|}{R\left|R - \overline{z_1}\right|} = \frac{|\mu|}{R} \Rightarrow |\mu| = R^2$, ce qui est également une condition suffisante. On a finalement les transformations de la forme

$$(\mathbf{1}) \qquad f(z) = \omega\frac{R^2(z - z_0)}{R^2 - z\overline{z_0}} \text{ avec } |z_0| < R \text{ et } |\omega| = 1.$$

Le travail fait précédemment sur la géométrie de Poincaré peut alors être repris en considérant ce type de transformations (et non plus seulement les transformations fuchsiennes), les déplacements sont alors définis par ces transformations, mais il suffit de reprendre ce qui a été fait en envoyant H sur l'intérieur d'un cercle $|z| = R$ par une homographie : $\varsigma \in \mathrm{H} \to z \in \mathrm{D}(O, R) : z = \rho\frac{\varsigma - a}{\varsigma - \overline{a}}$ où $a \to 0$, $\overline{a} \to \infty$ et $|\rho| = R$.

L'invariant différentiel est alors obtenu en dérivant : $\frac{df}{dz} = R^2\omega\frac{R^2 - z_0\overline{z_0}}{\left(R^2 - z\overline{z_0}\right)^2}$; on montre alors facilement que $\left|\frac{df(z)}{dz}\right| = \frac{R^2 - |f(z)|^2}{R^2 - |z|^2}$ et l'*invariant différentiel linéaire* devient $\frac{ds}{R^2 - r^2}$ lorsque $|z| = r$.

Généralisons aux homographies quelconques : soit $z \to Z = g(z) \to h(Z) = \frac{aZ + b}{cZ + d}$, $ad - bc \neq 0$ où g est holomorphe dans un domaine D et $g(z) \neq -\frac{d}{c}$ dans D.

Dérivons h une première fois : $h'(Z) = \frac{ad - bc}{(cZ + d)^2}Z'$, recommençons : $h''(Z) = \frac{ad - bc}{(cZ + d)^2}Z'' - 2Z'^2\frac{ad - bc}{(cZ + d)^2}$,

soit en divisant des deux côtés par h' : $\frac{h''(Z)}{h'(Z)} = \frac{Z''}{Z'} - 2\frac{cZ'}{cZ + d}$, soit

$$\frac{c}{cZ + d} = \frac{1}{2}\frac{h''(Z)}{h'(Z)} - \frac{1}{2}\frac{Z''}{Z'^2} \quad (\mathbf{2})$$

enfin dérivons une dernière fois : $\left(\frac{h''}{h'}\right)' = \left(\frac{Z''}{Z'}\right)' - 2\left(\frac{cZ'}{(cZ+d)^2}\right)' = \left(\frac{Z''}{Z'}\right)' - \frac{2c}{cZ+d}Z'' + 2\frac{c^2Z'^2}{(cZ+d)^2}$ d'où en utilisant (**2**) :

$$\left(\frac{h''}{h'}\right)' = \left(\frac{Z''}{Z'}\right)' + \frac{1}{2}\left(\frac{h''}{h'}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{Z''}{Z'}\right)^2 \Leftrightarrow \left(\frac{h''}{h'}\right)' - \frac{1}{2}\left(\frac{h''}{h'}\right)^2 = \left(\frac{Z''}{Z'}\right)' - \frac{1}{2}\left(\frac{Z''}{Z'}\right)^2 ;$$

l'expression

$$\left(\frac{Z''}{Z'}\right)' - \frac{1}{2}\left(\frac{Z''}{Z'}\right)^2 = \frac{Z^{(3)}Z' - (Z'')^2}{Z'^2} - \frac{(Z'')^2}{2Z'^2} = \frac{Z^{(3)}}{Z'} - \frac{3}{2}\left(\frac{Z''}{Z'}\right)^2$$

reste donc invariante par toute transformation homographique. C'est la *dérivée de Schwartz* de $Z = g(z)$.

3-6 : ***Conclusion***

Nous concluons cette approche en traduisant certaines choses sous une forme un peu plus moderne : lorsque le domaine D est un demi-plan, un disque ouvert ou $\mathbb{C}$, l'ensemble des automorphismes [3] de D, aut(D), est formé par des sous-groupes du groupe des homographies ; de plus, si D_1 et D_2 sont deux domaines conformément équivalents (il existe *f* holomorphe bijective de D_1 vers D_2) alors aut(D_1) et aut(D_2) sont isomorphes.

Soient D un domaine de $\mathbb{C}$ et G un sous groupe de aut(D) : une fonction méromorphe *f* dans D s'appelle une fonction automorphe (par rapport à G) si pour tout *g* de G, $f \circ g = f$. Parmi les fonctions automorphes on trouve

* les fonctions simplement périodiques (D = $\mathbb{C}$, G est engendré par une translation, $g(z) = z + \alpha$),

* les fonctions elliptiques (D = $\mathbb{C}$, G est engendré par deux translations, $g_1(z) = z + \alpha$, $g_2(z) = z + \beta$ avec α et β non colinéaires, i.e. $\alpha / \beta \notin \mathbb{R}$),

* les fonctions modulaires (D = H, G est un sous-groupe des homographies : les fonctions fuchsiennes dont les coefficients sont dans $\mathbb{Z}$).

La géométrie plane développée précédemment est en fait la géométrie hyperbolique de Lobatchevski : on peut remplacer H par le disque unité U moyennant de nouveau une homographie : une *droite* sera alors un arc de cercle orthogonal au cercle unité, tous les résultats précédents restant évidemment valables. Le groupe aut(U) est le groupe des bijections de U dans U qui préserve les angles entre les *droites* ainsi que la *distance* non euclidienne.

Les groupes aut(D) et aut(U) sont évidemment isomorphes ; ils sont également isomorphes au groupe *projectif spécial linéaire* $\mathrm{PSL}(2\,;\mathbb{R}) = \mathrm{SL}(2\,;\mathbb{R})/\pm I$ des matrices 2-2 de la forme $\pm\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ à coefficients réels avec $ad - bc = 1$.

[3] Rappelons qu'un automorphisme est un morphisme bijectif d'un groupe dans lui-même ; un morphisme *f* conserve la loi de groupe : pour *a*, *b* dans G, *f*(*a***b*) = *f*(*a*)**f*(*b*).

4-1 : *Le prolongement analytique (analytic continuation in english, Fortsetzung in deutsch)*

L'idée générale et extrêmement puissante du prolongement analytique est que si pour une fonction analytique f de domaine (ouvert connexe) U il existe une fonction analytique g de domaine V (également ouvert connexe) avec $U \subset V$ et que $f = g$ sur U alors f est analytique sur V.

Ceci autorise évidemment à définir f sur un domaine plus grand que ce que l'on pourrait attendre initialement : par exemple on définit facilement $\cos z$ sur $\mathbb{R}$, par prolongement on peut alors étendre sa définition à $\mathbb{C}$ entier (avec le même développement de Taylor bien sûr).

La démonstration peut être relativement pénible (voir par exemple H. Cartan), nous allons essayer d'en donner une « relativement facile ». La démarche est la suivante :

* on montre d'abord que si une fonction analytique f a un zéro α d'ordre m, alors il existe g telle que $f(z) = (z-\alpha)^m g(z)$, g analytique et ne s'annulant pas en α ;

* dans un deuxième temps on en déduit que si f est analytique dans U, alors tout compact Ω de U ne contient qu'un nombre fini de zéros de f ;

* enfin, si deux fonctions analytiques f et g sont égales sur U, leur différence $h = f - g$ s'annule une infinité de fois sur U, cette différence est donc partout nulle, particulièrement sur le domaine V de g, d'où $f = g$ sur V.

En fait tout ceci est lié à la « rigidité » des fonctions holomorphes dans le sens où la modification d'une telle fonction en un point entraîne sa modification partout (ce n'est pas un hasard si les fonctions holomorphes sont harmoniques : elles réagissent en fait comme des cordes).

<u>Etape 1</u> f est analytique donc $f(z) = \sum_{n=m}^{\infty} c_n (z-\alpha)^n = (z-\alpha)^m g(z)$ où $g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_{m+k}(z-\alpha)^k$ avec $c_m \neq 0$; g est donc analytique en α et continue dans U.

Comme g est continue dans U il y aura un disque D_0 centré en α où $|g(z)-\alpha| = |g(z)-c_m| < \frac{1}{2}|c_m|$ (on peut prendre ce qu'on veut à la place de 1/2, l'essentiel étant que $|g(z)-\alpha|$ peut prendre toutes les valeurs entre 0 et $|c_m|$).

Par ailleurs on a l'inégalité $|a-b| \geq \big||a|-|b|\big|$ qui appliquée ici donne

$$|g(z)-g(\alpha)| \geq \big||g(z)|-|g(\alpha)|\big| \Rightarrow |g(z)| \geq |g(\alpha)| - |g(z)-g(\alpha)| \geq |c_m| - \frac{1}{2}|c_m| = \frac{1}{2}|c_m|.$$

Conclusion, g ne s'annule pas.

<u>Etape 2</u> *Principe des zéros isolés.*

Soit f analytique dans un voisinage U de α ; s'il existe dans U une suite z_n telle que $\lim_{n\to\infty} z_n = \alpha$ et $f(z_n) = 0$ pour tout n entier, alors f est nulle sur U.

f étant continue on a évidemment $f\left(\lim_{n\to\infty} z_n\right) = \lim_{n\to\infty} f(z_n) \Rightarrow f(\alpha) = 0$; α n'est donc pas un *zéro isolé* ; en utilisant Taylor sur f, on a $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(\alpha)}{k!}(z-\alpha)^k$. Si f n'était pas nulle il existerait une valeur m de k pour laquelle $f^{(m)}(\alpha) \neq 0$ et $f^{(k)}(\alpha) = 0$ pour $k < m$. On aurait donc $f(z) = (z-\alpha)^{m-1} \sum_{k=m}^{\infty} c_k (z-\alpha)^k$ avec $c_m \neq 0$; or f s'annule une infinité de fois, il y a donc contradiction.

<u>Etape 3</u> *Principe d'identité des fonctions holomorphes.*

Soient f et g deux fonctions holomorphes dans un domaine U de $\mathbb{C}$ alors

* Si $f^{(n)}(\alpha) = g^{(n)}(\alpha)$ pour tout entier n et pour un point α de U, alors $f = g$.

* Si $f(z_n)=g(z_n)$ pour tout entier n et pour une suite de nombres distincts z_n dans U ayant un point d'accumulation α dans U, alors $f = g$.

Les deux propositions sont équivalentes, la démonstration est immédiate en appliquant le principe des zéros isolés à la fonction $f - g$.

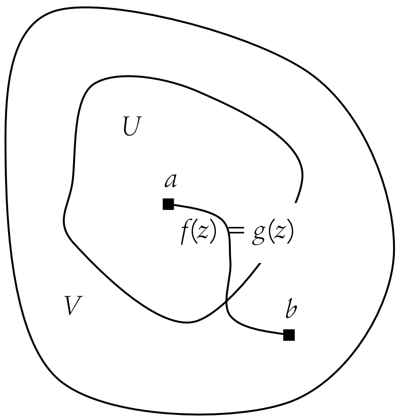
- *Principe du prolongement analytique* ou *théorème de monodromie*.

Nous énonçons le théorème sous une forme simple (il en existe des plus compliquées et plus générales…) :

Soient f et g deux fonctions analytiques dans un domaine (ouvert connexe) V de $\mathbb{C}$; s'il existe un ouvert U inclus dans V tel que $f(z)=g(z)$ pour tout z de U, alors $f(z)=g(z)$ pour tout z de V.

Comme on le voit sur la figure suivante il faut montrer que pour un chemin allant de a (dans U et avec $f(a) = g(a)$) à b (dans V), alors $f(b) = g(b)$; comme V est connexe, un tel chemin (allant de a à b) existe et est défini par une fonction continue $\gamma\colon [0\,;1]\to V$ avec $\gamma(0) = a$, $\gamma(1) = b$.

Il faut donc montrer que l'ensemble $I=\{t\in[0\,;1]/f(\gamma(t))=g(\gamma(t))\}$ est justement $[0 ; 1]$. Il est clair que I n'est pas vide ; soit s sa borne supérieure (i.e. le plus petit de tous les majorants possibles de t, t dans I ; s n'est pas forcément dans I), il existe une suite (t_n) de points de I tendant vers s et tels que $f(\gamma(t_n))=g(\gamma(t_n))$ d'où en passant à la limite et grâce à la continuité de f et g, $f(\gamma(s))=g(\gamma(s))$. Conclusion s est dans I.



Maintenant pour justifier que $f(b) = g(b)$, il faut montrer que $s = 1$; supposons que ce ne soit pas le cas et appelons c l'image de s par γ.

Il existe alors un disque ouvert $D(c, r)$ inclus dans V, de rayon r non nul, où $f(z)$ et $g(z)$ sont représentées par des séries entières convergentes, f et g étant égales sur la partie de D dans U, soit $I_1=\{t\in[0\,;1]/t<s,|\gamma(t)-c|<r\}$; ici intervient le principe des zéros isolés : puisque $f - g = 0$ pour une infinité de valeurs de t, $f - g = 0$ pour toutes les valeurs de t correspondant aux points dans D et particulièrement dans la partie de D dans V : $I_2=\{t\in[0\,;1]/t>s,|\gamma(t)-c|<r\}$. Ceci signifie que s n'est plus la borne supérieure de I, ce qui est contradictoire et $s = 1$.

Quelques exemples et contre-exemples :

- On prend la fonction $f(z)=\dfrac{1}{1+z},\, z\neq -1$ et la fonction $g(z)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n$ avec $|z|<1$; g est la somme d'une suite géométrique qui converge dans la boule unité et de somme $f(z)$ dans cette boule. En fait f est le prolongement analytique de g en dehors de cette boule !

- Dans l'exemple suivant ça ne marche pas : $f(z)=\displaystyle\sum_{n\geq 0} z^{2^n}$ converge à l'intérieur de la boule unité, mais il est immédiat que si $z\to 1^-$, $f(z)\to\infty$; le point 1 est une singularité de f ; de même comme

$f(z)=z^2+f(z^2)$, lorsque $z^2 \to 1^-$, $f(z^2)\to\infty$ et donc les points 1 et -1 sont des singularités de *f*, le même raisonnement peut être tenu pour toutes les puissances de *z* de la forme z^{2^n} ; les points *z* correspondants sont sur le cercle $|z|=1$ et il est impossible de trouver un arc aussi petit que l'on veut où un de ces points ne soit pas. Le prolongement ne peut donc se faire.

- Prenons la série $\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)+\sum_{n=1}^{\infty}\left(z-\frac{1}{z}\right)\left(\frac{1}{1+z^n}-\frac{1}{1+z^{n-1}}\right)$; la somme de ses $n+1$ premiers termes est $\frac{1}{z}+\left(z-\frac{1}{z}\right)\frac{1}{1+z^n}$. La série converge pour toutes les valeurs de *z*, 0 excepté, mais pas sur le cercle $|z|=1$. Mais lorsque n tend vers $+\infty$, $|z|^n$ tend vers 0 ou $+\infty$ suivant que *z* est à l'intérieur ou à l'extérieur du cercle. Par conséquent $\frac{1}{z}+\left(z-\frac{1}{z}\right)\frac{1}{1+z^n}$ tend vers *z* à l'intérieur, vers 1/*z* à l'extérieur et représente deux fonctions totalement distinctes. Il n'est alors pas question de prolongement.
- Pour quelques exemples de prolongement, voir les articles sur la fonction Gamma et la fonction Zêta.

4-2 : ***Principe du maximum***

Nous avons vu plus haut la formule de la moyenne $f(a)=\int_0^1 f(a+re^{2i\pi t})dt$, nous en déduisons un théorème important connu sous le nom de *principe du maximum* :

Soit *f*, holomorphe non constante dans un domaine D de $\mathbb{C}$, alors la fonction $z\to|f(z)|$, *z* dans D, ne peut avoir de maximum relatif dans D.

Supposons le contraire : *a* est un maximum relatif pour $|f|$, alors il existe un disque ouvert de centre *a*, de rayon *r* tel que $|f(z)|\le|f(a)|$ pour $|z-a|<r$; on peut supposer que *f*(*a*) n'est pas nul, sinon *f* serait nulle pour tout *z* et *f* serait constante dans D (principe des zéros isolés). Posons $g(z)=\frac{f(z)}{f(a)}$, alors $g(a)=1$ et $|g(z)|\le 1$ pour $|z-a|\le r$; appliquons la formule de la moyenne à *g* :

$$1=g(a)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(a+re^{it})dt\,.$$

D'un côté on a $\mathrm{Re}\left[g(a+re^{it})\right]\le\left|g(a+re^{it})\right|\le 1$, $0\le t\le 2\pi$, et en posant $h(t)=1-\mathrm{Re}\left[g(a+re^{it})\right]$, on a $h(t)\ge 0$ et $\int_0^{2\pi}h(t)dt=0$; *h* est alors nulle dans $[0\,;2\pi]$ d'où $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{Re}\left[g(a+re^{it})\right]dt=1$. On a donc finalement $\left|g(a+re^{it})\right|=1$, pour $0\le t\le 2\pi$, soit $g(z)=1$ sur le cercle $|z-a|=r$ et donc également dans le disque. *f* est alors constante dans D, ce qui est contradictoire.

Une interprétation géométrique simple est que lorsque *f* est holomorphe, elle est harmonique (i.e. son laplacien, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, est nul partout) , si on a un maximum local, alors *f* a la forme d'un bol à cet endroit et on aura $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}>0$ ainsi que $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}>0$ donc le laplacien ne s'annulera pas à cet endroit. Même raisonnement si on a un maximum : le bol est renversé. Pour que $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$, il faut que $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ soient de signes opposés, et donc que *f* ait la forme d'une selle (ou d'une chips), situation où il n'y a pas d'extremum. Une conséquence importante de tout ça est que $z \to |f(z)|$, non constante, ne peut être infinie partout et atteindra son maximum (dans un domaine borné) sur le bord de ce domaine.

Le principe du maximum fournit le principe du minimum : f holomorphe non constante, $z \to |f(z)|$ possède un minimum relatif en a si et seulement si $f(a) = 0$.

Si $|f|$ a un minimum alors $1/|f|$ a un maximum et la démonstration découle du théorème précédent.

On a également le résultat suivant : soit f, continue dans un domaine borné D de $\mathbb{C}$ sauf peut-être au bord, holomorphe dans D, alors

* ou bien f est nulle pour un a de D

* ou bien il existe b sur le bord de D qui est le minimum de f.

Une consquence amusante de ce théorème est qu'une équation polynomiale $P(z)=0$ a au moins une racine dans $\mathbb{C}$ si le degré de P est supérieur ou égal à 1 (*théorème fondamental de l'Algèbre*) : lorsque $|z| \to \infty$, $|P(z)| \to \infty$, donc $\inf_{|z|\le R} |P(z)|$ ne peut être atteint sur le bord $|z|=R$ lorsque R est grand ; on a donc un a tel que $|a|<R$ tel que $P(a)=0$.

4-3 : ***Sinus comme produit infini***

Euler s'était fait plusieurs remarques :

- $\sin x$ a pour zéros les nombres de la forme $x = k\pi$ avec k entier relatif ;

- si un polynôme unitaire (le coefficient de x^n est 1) $P(x)=\sum_{i=1}^{n} a_i x^i$ a n racines α_i alors : $P(x)=\prod_{i=1}^{n}(x-\alpha_i)$

d'où $Q(x)=\sum_{i=1}^{n} a_i x^{n-i}$ a n racines $\frac{1}{\alpha_i}$ et s'écrit $Q(x)=\prod_{i=1}^{n}(1-\alpha_i x)$;

il considère alors $\frac{\sin x}{x}$ comme un polynôme… :

$$\frac{\sin x}{x} = 1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+\ldots$$

d'où avec les remarques précédentes :

$$\frac{\sin x}{x} = \prod_{k\in\mathbb{Z}^*}\left(1-\frac{x}{k\pi}\right) = \prod_{k\ge 1}\left(1-\frac{x}{k\pi}\right)\left(1+\frac{x}{k\pi}\right) = \prod_{k\ge 1}\left(1-\frac{x^2}{k^2\pi^2}\right)$$

qui donne des résultats plutôt satisfaisants comme le montre la figure ci-dessous.

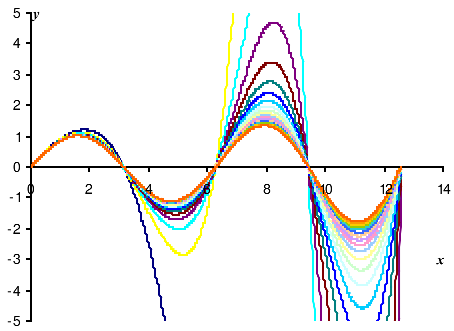


fig. 1 : convergence du produit infini de sin$x$ (n=20)

On constate également que si

$$Q(x)=1+a_{n-1}x+a_{n-2}x^2+a_{n-3}x^3+\dots$$

alors $-a_{n-1}$ est la somme des racines, a_{n-2} la somme des produits de deux racines, etc.
Finalement il utilise ceci pour calculer la somme des racines

$$\frac{1}{\pi^2}+\frac{1}{2^2\pi^2}+\dots+\frac{1}{n^2\pi^2}+\dots=\frac{1}{6}$$

et en tire le résultat que tous cherchaient depuis au moins un siècle (c'est le *problème de Bâle*) :

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\dots+\frac{1}{n^2}+\dots=\frac{\pi^2}{6}.$$

L'argument de considérer $\frac{\sin x}{x}$ comme un polynôme ne le satisfaisait quand même pas, aussi passant par un autre biais et utilisant le fait que $e^x=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$, il écrit que

$$\sin x=\frac{1}{2i}\left(e^{ix}-e^{-ix}\right)=\frac{1}{2i}\left[\left(1+\frac{ix}{n}\right)^n-\left(1-\frac{ix}{n}\right)^n\right]\ (\mathbf{1})$$

et développe en utilisant la factorisation $a^n-b^n=(a-b)\prod\limits_{k=1}^{(n-1)/2}a^2-2ab\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)+b^2$, ce qui donne en posant $N=(n-1)/2$:

$$\begin{aligned}\sin x&=\frac{1}{2i}\frac{2ix}{n}\prod_{k=1}^{N}2\left(1-\frac{x^2}{n^2}-\left(1+\frac{x^2}{n^2}\right)\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)\right)\\&=\frac{2^N x}{n}\prod_{k=1}^{N}\left(1-\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)\right)-\frac{x^2}{n^2}\left(1+\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)\right).\end{aligned}$$

Maintenant considérons que $\frac{2k\pi}{n}$ est petit, remplaçons $\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)$ par $1-\frac{1}{2}\left(\frac{2k\pi}{n}\right)^2$ et factorisons tous les termes $\left(\frac{2k\pi}{n}\right)^2$, nous obtenons alors :

$$\frac{\sin x}{x}=\frac{2^{2N}\pi^{2N}(N!)^2}{(2N+1)^{2N+1}}\prod_{k=1}^{N}\left(1+\frac{x^2}{n^2}-\frac{x^2}{k^2\pi^2}\right).$$

Si on développe (**1**) bêtement, le premier terme est $\frac{1}{2i}\left(n\frac{ix}{n}+n\frac{ix}{n}\right)=x$, donc notre énorme coefficient devant vaut 1 (à la limite évidemment) ! Et à l'intérieur du produit le terme x^2/n^2 tend vers 0 très vite ; Euler conclut donc à la convergence du produit infini de manière douteuse mais efficace.

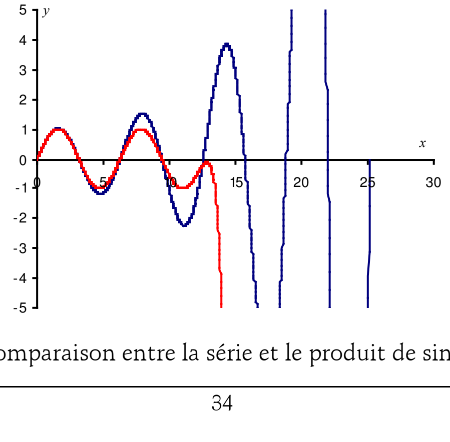


fig. 2 : comparaison entre la série et le produit de $\sin x$ ($k=15$).

4-4 : ***Produits infinis***

Nous avons un peu abandonné nos fonctions analytiques, mais nous y revenons maintenant pour retrouver le résultat d'Euler.

Pour ce faire nous devons au préalable nous demander comment caractériser la convergence d'un produit infini… L'idée est bien sûr de considérer le logarithme du produit (détermination principale de ln) et de transformer le produit en série.

Pour les séries de fonctions holomorphes la convergence uniforme est similaire à ce qui se passe dans $\mathbb{R}$, nous gardons donc les mêmes définitions. Pour les fonctions méromorphes ça se complique un peu du fait de l'existence de pôles, aussi on va carrément les enlever dans la mesure où le nombre de leurs termes contribuant à la série est forcément fini.

On dira donc qu'une série de fonctions méromorphes $\sum f_n$ *converge normalement* (la série peut être majorée par une série convergente à termes constants positifs, souvent une série géométrique) (resp. *uniformément*) sur un ouvert U si on peut lui enlever un nombre fini de termes de sorte que la série restante n'ait pas de pôle sur U et converge *normalement* (resp. *uniformément*) sur U.

Intéressons nous « par exemple » à la série $\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{1}{(z-n)^2}$ en prenant une bande verticale $x_0\le \mathrm{Re}(z)\le x_1$; une telle bande contient un nombre limité d'entiers n ; dans la série partielle $\sum_{n<x_0}\frac{1}{(z-n)^2}$ chaque terme est majoré par $\frac{1}{(x_0-n)^2}$ et dans la série partielle $\sum_{n>x_1}\frac{1}{(z-n)^2}$ chaque terme est majoré par $\frac{1}{(x_1-n)^2}$; par conséquent en enlevant les termes situés à l'intérieur de la bande il reste une série de fonctions holomorphes qui converge normalement vers une fonction $f(z)$ dans la bande.

Nous avons alors les propriétés :

* f est de période 1 :

$$f(z+1)=\sum_n\frac{1}{(z+1-n)^2}=\sum_{n'}\frac{1}{(z-n')^2}=f(z)\ ;$$

* les pôles sont tous les entiers et ils sont doubles ; le résidu en un pôle n_0 est nul puisque $f(z)=\frac{1}{(z-n_0)^2}+g(z)$ (pas de coefficient c_{-1} et g holomorphe).

Cherchons une fonction qui corresponde… une fonction avec période 1 : ça fait du monde ; qui s'annule pour les entiers : elle est au dénominateur ; elle s'annule deux fois : elle est au carré, un bon candidat est alors $\frac{1}{(\sin\pi z)^2}$; du fait de la périodicité regardons simplement ce qui se passe en 0 :

$$\left(\frac{1}{\sin\pi z}\right)^2=\frac{1}{\left(\pi z-\frac{1}{6}\pi^3z^3+\ldots\right)^2}=\frac{1}{\pi^2z^2}\left(1-\frac{1}{6}\pi^2z^2+\ldots\right)^{-2}=\frac{1}{\pi^2z^2}+\frac{1}{3}+z^2(\ldots).$$

On a bien un pôle double, mais il faut faire disparaître π^2, on prend donc

$$\varphi(z)=\left(\frac{\pi}{\sin\pi z}\right)^2=\frac{1}{z^2}+\frac{\pi^2}{3}+z^2(\ldots)$$

qui marche mieux.

Nous allons regarder comment se comporte $f-\varphi$: reprenons une bande de largeur au moins 1 qui contiendra un pôle, par exemple autour de 0 ; les parties de chaque fonction en $1/z^2$ s'annulent dans $f-\varphi$

qui est donc holomorphe dans la bande ; si on fait tendre la partie imaginaire de z vers l'infini, tous les termes de f tendent vers 0 *indépendamment* de n, f devient donc nulle ; de même dans φ qui devient nulle, pour le montrer on utilise la relation que vous pouvez démontrer :

$$\left|\sin^2 z\right| = \sin^2(\operatorname{Re} z) + \sinh^2(\operatorname{Im} z)$$

par conséquent $f-\varphi$ est nulle à l'infini et grâce au théorème de Liouville $f-\varphi$ est constante sur $\mathbb{C}$; comme $f-\varphi$ est nulle à l'infini cette constante est 0 et les deux fonctions sont égales.

Finalement on obtient ce résultat très intéressant que :

$$\left(\frac{\pi}{\sin \pi z}\right)^2 = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{(z-n)^2} = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{(z+n)^2}.$$

La deuxième égalité étant obtenue par parité. Utilisons ce résultat pour quelques bricoles :

* si on passe à la limite quand z tend vers 0, on a grâce au développement précédent :

$$\lim_{z\to 0}\left[\frac{\pi^2}{\sin^2 \pi z} - \frac{1}{z^2}\right] = \frac{\pi^2}{3} = \sum_{n\in\mathbb{Z}^*} \frac{1}{n^2} = 2\sum_{n\neq 0} \frac{1}{n^2}$$

d'où le résultat d'Euler (et vous pouvez en trouver plein d'autres histoire d'épater vos amis pendant les longues veillées d'hiver…).

* Remarquons que $\frac{1}{(z-n)^2}$ est la dérivée de $\frac{-1}{z-n}$ et qu'une primitive de $\frac{\pi^2}{\sin^2 \pi z}$ est $-\frac{\pi}{\tan \pi z}$; on a donc

$$\frac{\pi}{\tan \pi z} = \frac{1}{z} + \sum_{n\in\mathbb{Z}^*} \frac{1}{z-n} + K,$$

mais pour z tendant vers 0, $\frac{\pi z}{\tan \pi z} - \frac{1}{z}$ tend vers 0, aussi devons nous annuler le terme $K + \sum_{n\in\mathbb{Z}^*} \frac{-1}{n}$ ce que nous obtenons facilement en rentrant $1/n$ dans la somme :

$$\frac{\pi}{\tan \pi z} = \frac{1}{z} + \sum_{n\in\mathbb{Z}^*}\left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n}\right).$$

Si on réécrit ceci dans $\mathbb{N}$, on a

$$\frac{\pi}{\tan \pi z} = \frac{1}{z} + \sum_{n>0}\left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n} + \frac{1}{z+n} - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{z} + \sum_{n>0}\left(\frac{2z}{z^2-n^2}\right).$$

* Maintenant faisons l'opération contraire, dérivons…

$$\frac{-2\pi^3 \cos \pi z}{\sin^3 \pi z} = \frac{-2}{z^3} + \sum_{n\in\mathbb{Z}^*} \frac{-2}{(z-n)^3},$$

d'où

$$\frac{\pi^3 \cos \pi z}{\sin^3 \pi z} - \frac{1}{z^3} = \sum_{n\in\mathbb{Z}^*} \frac{1}{(z-n)^3}.$$

Repassons à la limite quand z tend vers 0 ; le terme de gauche tend vers 0 alors que celui de droite tend vers $-\zeta(3) \approx -1,202$ ce qui est quand même « un peu » génant.

Regardons d'un peu plus près le comportement de la série en traçant sur une période de 1 :

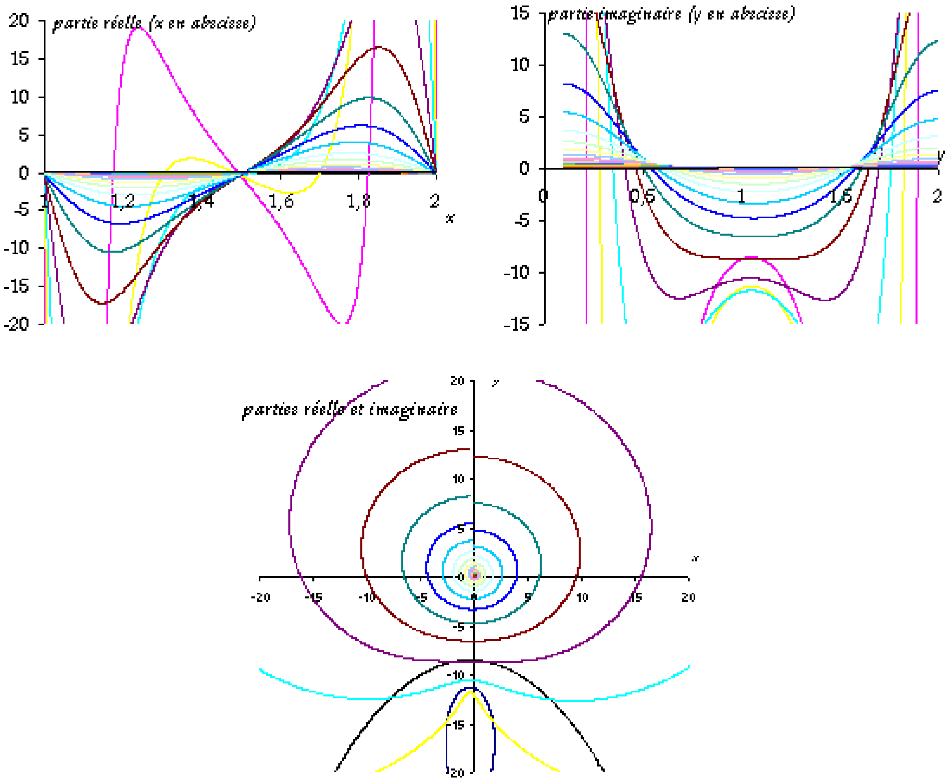


fig. 3 : somme des $\dfrac{1}{(z-n)^3}$, Re(z) dans [1 ; 2] ; Im(z) dans [0,01 ; 2].

On voit apparaître une double périodicité : 1 sur les x, ce qui est normal, mais également une période ω sur les y, laquelle période dépend en fait de l'intervalle sur lequel on trace y. Les courbes obtenues sont également instructives car elles montrent le comportement de la série.

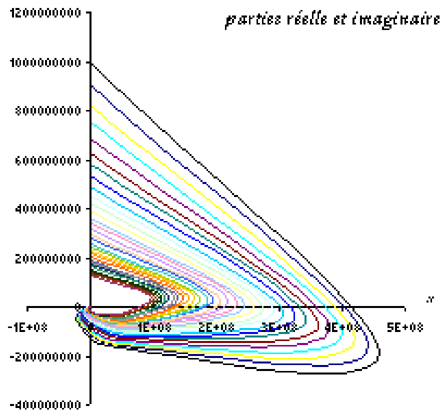


fig. 4 : Re(z) dans [0,001 ; 1] et Im(z) dans [0,001 ; 0,002].

En fait le phénomène suivant se produit : quand x=Re(z) et y=Im(z) tendent vers 0, x se comporte à peu près gentiment, prenant des valeurs infinies au bout de sa période 1 et tendant vers une limite finie vers 0 (particulièrement $\zeta(3)$), par contre la période de y se contracte et y prend des valeurs infinies sur n'importe quel intervalle [u ; u'] où u et u' tendent vers 0. On pourrait se dire qu'en isolant les parties réelles et imaginaires de

$$\psi(z)=\frac{\pi^3\cos\pi z}{\sin^3\pi z}-\frac{1}{z^3}$$

on devrait pouvoir se débarrasser du problème y, mais en fait les deux parties, réelle et imaginaire, sont profondément imbriquées l'une dans l'autre et interdisent à priori de faire varier l'une sans l'autre.

Avant de continuer revenons sur les produits infinis en généralisant :

On dira qu'un produit infini de fonctions $(f_n(z))$ continues dans un ouvert U *converge normalement* sur un compact K de U si les deux conditions suivantes sont remplies :

(i) $\lim_{n\to\infty} f_n(z)=1$ uniformément sur K, donc pour n assez grand $\left|f_n(z)-1\right|<1$ et $\ln(f_n(z))$ existe ;

(ii) la série de terme général $\ln(f_n(z))$ converge normalement sur K.

Si on pose $f_n=1+u_n$, la condition (ii) revient à dire que le produit $\prod_n f_n$ converge vers f si et seulement si $\sum_n u_n$ converge.

Sous ces conditions, la continuité et l'holomorphie sont conservées par le produit ; de plus la série de fonctions méromorphes $\sum_n \frac{f_n'}{f_n}$ converge vers $\frac{f'}{f}$ qui est la dérivée logarithmique de f.

Reprenons donc le produit infini de $\sin z$:

$$f(z)=z\prod_{k\geq 1}\left(1-\frac{z^2}{k^2}\right) ;$$

les fonctions f_k sont $f_k(z)=1-\frac{z^2}{k^2}$ et $u_k=\frac{z^2}{k^2}$, soit une série de Riemann qui converge sur tout compact de $\mathbb{C}$. f est donc holomorphe, ses pôles sont tous les entiers, sa dérivée logarithmique est

$$\frac{f'(z)}{f(z)}=\frac{1}{z}+\sum_{k\geq 1}\frac{-2z}{k^2-z^2}=\frac{1}{z}+\sum_{k\geq 1}\frac{2z}{z^2-k^2}$$

dont nous avons vu que c'était

$$\frac{\pi}{\tan\pi z}=\frac{\pi\cos\pi z}{\sin\pi z}=\frac{(\sin\pi z)'}{\sin\pi z} ;$$

par conséquent $\ln(f(z))=\ln(\sin\pi z)+K$ d'où $f(z)=c\sin\pi z$, soit

$$\frac{f(z)}{z}=c\frac{\sin\pi z}{z}=\pi c\frac{\sin\pi z}{\pi z} ;$$

le membre de gauche tend vers 1 quand z tend vers 0, celui de droite vers πc, d'où $c=\frac{1}{\pi}$ et

$$f(z)=\frac{\sin\pi z}{\pi}=z\prod_{k\geq 1}\left(1-\frac{z^2}{k^2}\right)=z\prod_{k\in\mathbb{Z}^*}\left(1-\frac{z}{k}\right).$$

4-5 : ***Les produits de Weierstrass***

Lorsqu'on dispose d'un polynôme $P(z)=\sum_{k=0}^{n}a_kz^k$, il est clair que ce dernier peut s'écrire $P(z)=a_n\prod_{k=1}^{n}(z-\alpha_k)=a_0\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{z}{\alpha_k}\right)$ où les α_k sont les zéros de P (en tenant compte de leur multiplicité). Comme on l'a vu précédemment l'idée est donc de considérer une fonction f possédant une infinité de zéros et de la mettre sous la forme $f(z)=K(z)f(0)\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{\alpha_n}\right)$ où K ne s'annule pas ; comme va intervenir la dérivée logarithmique et donc $\ln f(z)$, on a tout intérêt à prendre $K(z)=e^{g(z)}$ et donc à écrire f sous la forme $f(z)=ce^{g(z)}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{\alpha_n}\right)$; si 0 est un zéro de f de multiplicité m, on modifie légèrement la formule en

$$f(z)=cz^m e^{g(z)}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{\alpha_n}\right),\ c=\lim_{z\to 0}\frac{f(z)}{z^m}.$$

Malheureusement rien ne dit que le produit infini soit convergent (par exemple $\frac{1}{\Gamma(z)}=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)$ diverge gentiment) ; Weierstrass a donc eu l'idée de remplacer les termes $1-\frac{z}{\alpha_n}$ par les quantités $E\left(\frac{z}{\alpha_n},\nu_n\right)$ où

$$E(z,p)=(1-z)\exp\left(z+\frac{z^2}{2}+\ldots+\frac{z^p}{p}\right)\text{ avec } E(z,0)=1-z.$$

Ces quantités sont les *facteurs primaires de Weierstrass* : on a évidemment $E(z,p)=0$ si et seulement si $z=1$, soit $z=\alpha_n$ pour $E\left(\frac{z}{\alpha_n},\nu_n\right)$; par ailleurs en choisissant l'entier $p=\nu_n$ assez grand, on assure la convergence de $\prod_{n\geq 1}E\left(\frac{z}{\alpha_n},\nu_n\right)$.

Le théorème est alors le suivant (Weierstrass, 1876) :

Soit $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de complexes non nuls telle que $\lim_{n\to\infty}|\alpha_n|=+\infty$ si la suite est infinie, alors il existe une suite de nombres entiers positifs, $(\nu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $W(z)=\prod_{n\geq 1}E\left(\frac{z}{\alpha_n},\nu_n\right),\ z\in\mathbb{C}$ définit une fonction analytique W.

Le produit est absolument convergent ; il l'est uniformément dans tout disque fermé : $\sup_{|z|\leq R}\sum_{n\geq 1}\left|E\left(\frac{z}{\alpha_n},\nu_n\right)-1\right|<\infty$ pour tout R, $0<R<\infty$.

Soit f une fonction analytique quelconque, il existe un entier k et une fonction analytique g tels que pour tout z complexe $f(z)=z^k e^{g(z)}W(z)$.

Allons y pour une démonstration :

Montrons tout d'abord un résultat préliminaire : si $|z|<1$, on a $\ln(1-z)=-\left(z+\frac{1}{2}z^2+\ldots\right)$ et

$$E(z,p)=\exp(\ln(1-z))\exp\left(z+\frac{z^2}{2}+\ldots+\frac{z^p}{p}\right)=\exp\left(\ln(1-z)+z+\frac{z^2}{2}+\ldots+\frac{z^p}{p}\right)=\exp\left(\varphi_p(z)\right)$$

où $\varphi_p(z)=-\left(\frac{z^{p+1}}{p+1}+\frac{z^{p+2}}{p+2}+\ldots\right)$.

Prenons $p\geq 1$ et $|z|<\frac{1}{2}$, alors $\left|\varphi_p(z)\right|\leq\frac{|z|^{p+1}}{p+1}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots\right)=\frac{2}{p+1}|z|^{p+1}\leq|z|^{p+1}\leq 1$; on en déduit que

$$\left|E(z,p)-1\right| \le \exp\left(\left|\varphi_p(z)\right|\right)-1 \le 3\left|\varphi_p(z)\right| \le 3\left|z\right|^{p+1} \qquad (\mathbf{1})$$

grâce aux inégalités élémentaires suivantes :

$$\left|e^w-1\right| \le e^{|w|}-1 \text{ si } w\in\mathbb{C} \text{ et } e^t-1\le 3t \text{ si } 0\le t\le 1.$$

Lorsque $p = 0$, l'inégalité précédente est évidente.

Ordonnons les zéros non nuls de f de sorte que $0<|\alpha_1|\le|\alpha_2|\le\ldots\le|\alpha_n|\le\ldots$ Posons $|\alpha_n|=r_n$ et considérons le seul cas problématique où la suite est infinie et $r_n\to\infty$: soit $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, telle que $C(r)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{r_n}\right)^{p_n}<\infty$ pour tout $r>0$ (par exemple $p_n=n$ est un choix possible car à partir d'un certain rang $N(r)$, on aura $r_n>2r$, soit $\left(\frac{r}{r_n}\right)^n<\frac{1}{2^n}$ et la somme C sera finie).

Posons maintenant $\nu_n=p_n-1$ et $u_n(z)=E\left(\frac{z}{\alpha_n},\nu_n\right)-1$; à partir d'un certain rang $N(R)$, $0<R<\infty$, on a $r_n>2R$ et $\left|\frac{z}{\alpha_n}\right|<\frac{1}{2}$ si $|z|\le R$ d'où grâce à (**1**) : $\sum_{n\ge N(R)}|u_n(z)|\le 3\sum_{n\ge N(R)}\left|\frac{z}{\alpha_n}\right|^{p_n}\le 3C(R)$ si $|z|\le R$.

Par conséquent $\sup_{|z|\le R}\sum_{n\ge 1}|u_n(z)|\le \sup_{|z|\le R}\sum_{n<N(R)}|u_n(z)|+3C(R)<\infty$, ce qui prouve les diverses convergences.

Le reste se déduit aisément des prolégomènes.

Un corollaire intéressant est que toute fonction méromorphe peut s'écrire comme quotient de deux fonctions holomorphes : $f=\frac{g}{h}$.

Supposons f méromorphe non holomorphe ; si f n'a pas de zéros, $1/f$ est holomorphe et il suffit de prendre $g=1$, $h=\frac{1}{f}$; si f a des zéros, soit g une fonction holomorphe ayant exactement les mêmes zéros que f (par exemple W), alors $\frac{f}{g}$ est méromorphe sans zéros et on prend $h=\frac{g}{f}$ qui est holomorphe.

4-6 : ***Ordre d'une fonction***

On pourrait penser que l'écriture d'une fonction sous forme de produit infini est un bon substitut à l'écriture sous forme de série, malheureusement, un peu comme pour les fractions continues, cette écriture n'est pas unique : la donnée des α_n n'est pas suffisante et il faut leur adjoindre les ν_n qui peuvent être choisis d'une infinité de manières, chaque choix donnant une fonction W différente.

Reprenons néanmoins l'exemple de $\sin\pi z$ dont les zéros non nuls sont $\pm n$: la fonction W est $W(z)=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{n}\right)\left(1+\frac{z}{n}\right)$ qui est en fait le produit des fonctions $f_+(z)=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{n}\right)$, $f_-(z)=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)$, deux produits complètement divergents… il faut donc dans chaque fonction introduire des termes permettant de rendre convergents ces produits, en l'occurrence on utilise les *décompositions de Hadamard* (1893) : $f_\pm(z)=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1\pm\frac{z}{n}\right)e^{\mp\frac{z}{n}}=e^{\mp z\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots\right)}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1\pm\frac{z}{n}\right)$ dont le produit redonne bien W.

Cette décomposition est possible ici car le choix de W pour exprimer $\sin \pi z$ peut se faire sans ambiguïté car c'est une fonction d'*ordre fini* : si f est une fonction entière et $M(r)$ le maximum de $|f(z)|$ pour $|z| = r$ (et donc pour $|z| \leq r$), $M(r)$ est une fonction croissante de r qui croît plus vite que toute puissance de r (th. de Liouville). On classe alors les fonctions d'après la rapidité de croissance de leur module maximum en comparant $M(r)$ à une exponentielle e^{r^k} ou encore $\ln M(r)$ avec r^k ou encore $\ln_2 M(r) = \ln\left(\ln M(r)\right)$ avec $k \ln r$. Donnons les deux définitions équivalentes :

- l'*ordre* d'une fonction entière est le plus petit nombre ρ tel qu'il existe $r > 0$ et que $|f(z)| \leq \exp\left(|z|^\rho\right)$ pour tous les z tels que $|z| > r$; c'est également $\rho = \limsup_{r \to \infty} \frac{\ln_2 M(r)}{\ln r}$. L'ordre peut être nul, fini positif ou infini. On a à partir d'un r_0 ,

$$\ln_2 M(r) < (\rho + \varepsilon) \ln r \Leftrightarrow M(r) < e^{r^{\rho+\varepsilon}}$$

pour ε suffisamment petit, et il existe des r aussi grands que l'on veut pour lesquels

$$\ln_2 M(r) < (\rho - \varepsilon) \ln r \Leftrightarrow M(r) > e^{r^{\rho-\varepsilon}}$$

pour ε tel que $\rho - \varepsilon > 0$. Lorsque ces deux inégalités sont vérifiées (la première à partir d'une valeur de r, la deuxième pour des r arbitrairement grands), l'ordre de f est ρ .

Par exemple $\sin \pi z = \frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right)$ est tel que $|\sin \pi z| < e^{\pi r}$ donc son ordre est au plus 1, et $|\sin \pi i r| = \frac{e^{\pi r} - e^{-\pi r}}{2} > \frac{1}{3} e^{\pi r}$ si $r > r_0$, donc son ordre est 1.

- si f est une fonction entière d'ordre ρ et les α_n les zéros de f alors le *rang* p de f est le plus petit entier positif tel que $\sum_{\alpha_n \neq 0} |\alpha_n|^{(-p+1)} < \infty$;

- le produit canonique de Weierstrass est alors $f(z) = z^k e^{g(z)} W(z)$ où g est un polynôme de degré $q \leq \rho$;

- le *genre* de f est alors le plus grand des deux nombres p et q.

Le lecteur intéressé pourra consulter [Val] pp 425 et sq.

Par exemple $\frac{1}{\Gamma(z)} = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 + \frac{z}{n}\right)$ est d'ordre 1. Un autre exemple, particulièrement intéressant est celui de la fonction *zêta* de Riemann, ζ :

$$\zeta(z) = \frac{\exp\left(\ln(2\pi) - 1 - \frac{1}{2}\gamma\right)}{2(z-1)\Gamma\left(1 + \frac{1}{2}z\right)} \prod_\rho \left(1 - \frac{z}{\rho}\right) e^{\frac{z}{\rho}}$$

où ρ est un zéro non trivial de ζ et γ la constante d'Euler (résultat dû à Hadamard).

Un des résultats les plus intéressants de cette question d'ordre est que si f est d'ordre ρ fini

* f s'écrit $f(z) = z^m e^{g(z)} \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z}{\alpha_n}\right) e^{\frac{z}{\alpha_n} + \ldots + \frac{z^p}{p\alpha_n^p}}$ où p est un entier au plus égal à ρ ,

* la fonction g dans cette écriture est un polynôme de degré au plus égal à ρ .

Si f n'a qu'un nombre fini de zéros, alors c'est un polynôme ; réciproquement une fonction d'ordre non entier positif a toujours une infinité de zéros : par exemple $\sin \pi z$ a pour zéros tous les entiers relatifs, elle s'écrit donc

$$f(z)=ze^{Az+B}\prod_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{+\infty}\left(1-\frac{z}{n}\right)e^{\frac{z}{n}}$$

puisque $p=1$; par ailleurs $\dfrac{\sin \pi z}{z}$ est paire donc $A=0$ et pour $z=0$, $\dfrac{\sin \pi z}{z}$ tend vers π d'où $e^B=\pi$, soit finalement $\sin \pi z=\pi z\prod_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{+\infty}\left(1-\frac{z}{n}\right)e^{\frac{z}{n}}$.