Dérivée d'une fonction composée

1. Théorème fondamental

Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$, f une application de I dans J, g une application de J dans $\mathbb{R}$ et $h(x) = g(f(x))$ l'application composée de I dans $\mathbb{R}$. Si f est dérivable en a dans I et g dérivable en $b = f(a)$ dans J alors h est dérivable en a et $h'(a) = [\, g \circ f(a))\,]' = f'(a).g'(b)$.

Démonstration

Si f est dérivable en a alors $f(a+u) = f(a) + f'(a)u + o(u)$, si g est dérivable en b alors $g(b+v) = g(b) + g'(b)v + o(v)$ d'où

$$h(a+w) = g(f(a+w)) = g(f(a) + f'(a)w + o(w)) = g[b + o(w) + wf'(a)] \;;$$

si w tend vers 0, le terme $o(w) + wf'(a) = z$ également, donc

$$h(a+w) = g(b+z) = g(b) + g'(b)z + o(z)$$

d'où

$$h(a+w) = g(b) + g'(b)[wf'(a) + o(w)] + o(z) = g(b) + wg'(b)f'(a) + g'(b)o(w) + o(z) \;;$$

les deux derniers termes tendent vers 0 lorsque w tend vers 0, le nombre dérivé est alors $g'(b)f'(a)$ comme annoncé.

2. Différentielle

Ce qui est intéressant dans la dérivation c'est que c'est une application linéaire : notons D l'opération *dérivation d'une fonction* : $D(f)=f'$; comme $D(u+v)=u'+v'=D(u)+D(v)$ et $D(au)=au'=aD(u)$ c'est bien linéaire.

Ceci reste bien évidemment valable pour des dérivées partielles : on notera D_x la dérivation partielle par rapport à la variable x : $D_x(f) = \dfrac{\partial f}{\partial x}$.

Comme une application linéaire peut se représenter par une matrice, on peut dans le cas des fonctions de plusieurs variables traduire les différentes dérivées partielles par une matrice comportant autant de colonnes que le nombre de variables et autant de lignes que le nombre de fonctions à l'arrivée.

Par exemple une fonction vectorielle de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$: $\mathbf{f}(x,y) = (f_1, f_2, f_3)$ verra ses différentes dérivées partielles représentées par la matrice $\begin{pmatrix} D_x(f_1) & D_y(f_1) \\ D_x(f_2) & D_y(f_2) \\ D_x(f_3) & D_y(f_3) \end{pmatrix} = M$; on dira alors que la différentielle de $\mathbf{f}$ en $\mathbf{a}$ est l'application linéaire $\mathrm{d}f_{\mathbf{a}}$:

$$\mathrm{d}f_{\mathbf{a}} : \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} \to M.\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_x(f_1)h_1 + D_y(f_1)h_2 \\ D_x(f_2)h_1 + D_y(f_2)h_2 \\ D_x(f_3)h_1 + D_y(f_3)h_2 \end{pmatrix};$$

en fait c'est nettement plus simple d'écrire ceci sous la forme suivante qui est identique à la définition pour les fonctions d'une variable : $\mathbf{f}(\mathbf{a}+\mathbf{h}) = \mathbf{f}(\mathbf{a}) + M.\mathbf{h} + o(\mathbf{h}),\ \mathbf{h} \to \mathbf{0}$.

<u>M est la *matrice jacobienne* de $\mathbf{f}$.</u>

Un cas particulièrement intéressant est celui des fonctions holomorphes $f(x+iy)=u+iv$ dans $\mathbb{C}$ et donc telles que $D_x(u)=D_y(v), D_x(v)=-D_y(u)$ (conditions de Cauchy) : la matrice des dérivées partielles vaut initialement $\begin{pmatrix} D_x(u) & D_y(u) \\ D_x(v) & D_y(v) \end{pmatrix}$ et donc ici $\begin{pmatrix} D_x(u) & -D_x(v) \\ D_x(v) & D_x(u) \end{pmatrix}$, soit une matrice de similitude directe …

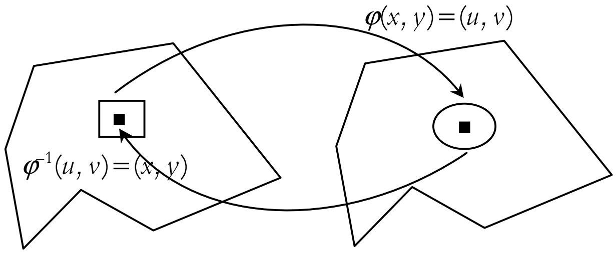
Si on fait des dérivations partielles successives on appliquera donc plusieurs matrices successivement ce qui simplifiera considérablement les calculs. L'ordre dans lequel on fait ces dérivations successives est-il important ? A priori oui, mais en fait on montre (*lemme de Schwartz*) que sauf dans le cas où une des dérivées partielles successives n'existe pas ça ne change rien.

Par exemple pour des fonctions de deux variables $f(x, y)=(u, v)$ on a $D_xD_y(u)=D_yD_x(u)$ si u est dérivable deux fois par rapport à x et y (et comme le dit R. Godement c'est heureusement le cas le plus général).

3. Jacobien

Le *jacobien* permet d'effectuer les changements de variable nécessaires dans certaines intégrales : nous souhaitons faire un changement de variables en dimension 2 (on peut généraliser sans problème) c'est à dire passer d'une fonction $f(x, y)$ réelle à une fonction $g(u, v)$ également réelle : par exemple le passage de polaires à cartésiennes se fait par $\varphi(r,\theta)=(x, y):\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases}$ et la fonction $f(x, y)=x^2+y^2$ devient $f(r,\theta)=r^2$.

Mais dans le changement de variable les points de départ et d'arrivée doivent être identiques, à savoir $M(x, y)=M(u, v)$; il faut donc que φ soit inversible et que $\varphi^{-1}(\varphi(x, y))=(x, y)$.



Appliquons la dérivation des fonctions composées (c'est encore possible avec plus d'une variable) à la relation précédente en utilisant nos matrices et en notant $\psi=\varphi^{-1}$:

$$D_\psi(\varphi).D\varphi=\mathrm{Id}$$

soit $\begin{pmatrix} D_u\psi_1 & D_v\psi_1 \\ D_u\psi_2 & D_v\psi_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} D_x\varphi_1 & D_y\varphi_1 \\ D_x\varphi_2 & D_y\varphi_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ d'où $\begin{cases} D_u\psi_1D_x\varphi_1+D_v\psi_1D_x\varphi_2=1 \\ D_u\psi_2D_x\varphi_1+D_v\psi_2D_x\varphi_2=0 \\ D_u\psi_1D_y\varphi_1+D_v\psi_1D_y\varphi_2=0 \\ D_u\psi_2D_y\varphi_1+D_v\psi_2D_y\varphi_2=1 \end{cases}$, les dérivées de φ étant calculées en un point (x, y), celles de ψ l'étant au point $(u, v)=\varphi(x, y)$.

Pour que φ soit inversible et que l'on puisse écrire la relation initiale, il faut que le déterminant de $\begin{pmatrix} D_x\varphi_1 & D_y\varphi_1 \\ D_x\varphi_2 & D_y\varphi_2 \end{pmatrix}$, soit $D_x\varphi_1.D_y\varphi_2-D_x\varphi_2.D_y\varphi_1$ ne soit pas nul ; ce nombre est donc le *Jacobien* de φ et par exemple dans le cas des coordonnées polaires il vaut :

$$\begin{vmatrix} D_r(r\cos\theta) & D_\theta(r\cos\theta) \\ D_r(r\sin\theta) & D_\theta(r\sin\theta) \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix}=r(\cos^2\theta+\sin^2\theta)=r\,.$$

Vous pouvez essayer avec le changement inverse : $\begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2} \\ \theta = \operatorname{atan}\left(\dfrac{y}{x}\right)(\pi) \end{cases}$…

Revenons au problème des intégrales : on a à calculer par exemple $I = \int_S f(x,y)dxdy$ et on veut faire le changement de variable $(x,y) = \varphi(u,v) = (\varphi_1(u,v), \varphi_2(u,v))$, soit $f(x,y) = f(\varphi(u,v)) = f(\varphi_1(u,v), \varphi_2(u,v))$; par exemple on cherche $I = \int_S \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$, en faisant le changement de variable cartésiennes à polaires on a $\sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta} = r$, il reste à changer $dxdy$ (et les bornes)…

L'idée générale et valable pour n'importe quel nombre de variables est de considérer que le terme $dxdy$ représente un 2-volume qui va être transformé en un autre 2-volume $dudv$ par φ ; du fait de la linéarité de la dérivation on peut considérer que le 2-volume $dudv$ est un parallélogramme dont les côtés sont des segments obtenus grâce à la matrice jacobienne de φ, or le « volume » du parallélogramme est le produit vectoriel $du \times dv$, soit ici le déterminant de la matrice jacobienne de φ, le jacobien de φ :

$$dxdy = \begin{vmatrix} D_x(u) & D_y(u) \\ D_x(v) & D_y(v) \end{vmatrix} dudv.$$

Le signe du jacobien peut jouer un rôle, mais comme il induit souvent des erreurs il vaut mieux prendre sa valeur absolue quitte à modifier les bornes pour respecter les signes.

En dimension 3 le 3-volume $dxdydz$ sera transformé grâce au produit mixte et là encore on retrouvera le déterminant de la matrice jacobienne. En dimension n quelconque on utilisera donc le jacobien de la matrice nxn pour effectuer les changements de variable.

Pour des démonstrations correctes voir :

Calcul différentiel et intégral de *N. Piskounov* : méthode relativement simple mais limitée à $n = 2$,

L'analyse au fil de l'histoire de *E. Hairer et G. Wanner* : méthode plus élaborée mais compréhensible,

Analyse Mathématique vol. 1, de Roger Godement : se place dans le cas général mais n'est pas très clair.

Signalons que cette notion est due à Jacobi (1841) mais est déjà présente chez Euler et Cauchy qui l'utilise pour calculer la position du centre de gravité d'un tétraèdre dont les sommets se déplacent continuellement.

4. Exemples

Faisons quelques exemples de calculs d'intégrales utilisant les changements de variable : nous avons vu le cas de la fonction de Gauss dans le livre, nous n'y revenons pas.

Prenons l'exemple de la fonction $\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-x}x^{\alpha-1}dx$ et faisons le produit

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta) = \int_0^{+\infty} e^{-x}x^{\alpha-1}dx \int_0^{+\infty} e^{-y}y^{\beta-1}dy = \lim_{r\to+\infty}\int_0^r\int_0^r e^{-x-y}x^{\alpha-1}y^{\beta-1}dxdy$$

visiblement le changement de variable $\begin{cases} x+y=u \\ y=v \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=u-v \\ y=v \end{cases}$ devrait être intéressant ; $M = \begin{pmatrix} D_u(x) & D_u(y) \\ D_v(x) & D_v(y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ dont le déterminant vaut 1. On a alors

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)=\lim_{r\to+\infty}\int_0^r\left(\int_0^u e^{-u}(u-v)^{\alpha-1}v^{\beta-1}dv\right)du=\lim_{r\to+\infty}\int_0^r e^{-u}\left(\int_0^1 u^{\alpha-1}(1-t)^{\alpha-1}(tu)^{\beta-1}u\,dt\right)du$$

$$=\left(\lim_{r\to+\infty}\int_0^r e^{-u}u^{\alpha+\beta-1}du\right)\left(\int_0^1(1-t)^{\alpha-1}t^{\beta-1}dt\right)=\Gamma(\alpha+\beta)B(\alpha,\beta)$$

dans la deuxième intégrale on a fait un deuxième changement de variable en posant $v=tu$ d'où si $0\le v\le u$, $0\le t\le 1$. La fonction B obtenue est la fonction *bêta* ainsi dénommée par Euler pour sa ressemblance avec le binôme. On a alors $B(\alpha,\beta)=\dfrac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$.

On utilise très souvent en Physique le calcul d'intégrales triples en coordonnées cartésiennes ou sphériques, le passage des unes aux autres est donc important :

la transformation des coordonnées sphériques aux cartésiennes est

$$(x,y,z)=g(r,\theta,\varphi)=\left(r\cos\theta\sin\varphi,\,r\sin\theta\sin\varphi,\,r\cos\varphi\right)$$

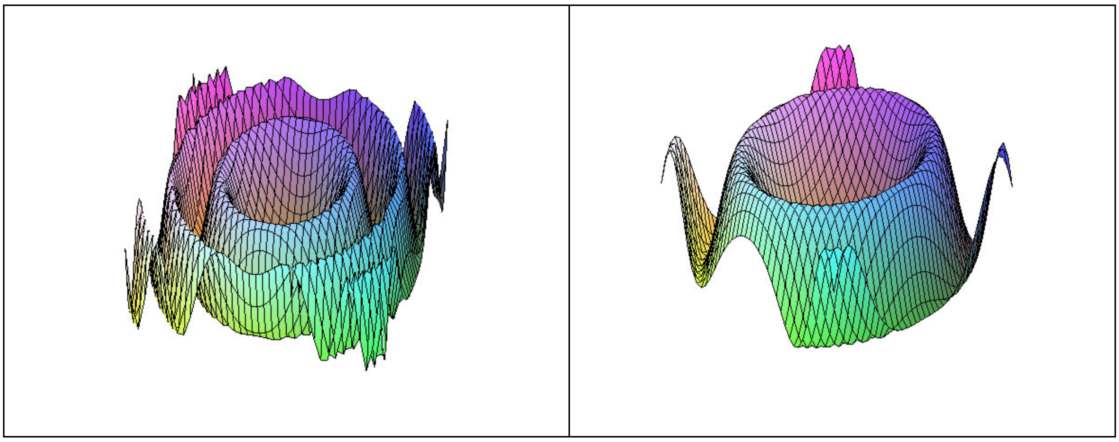
de matrice jacobienne $\begin{pmatrix}\cos\theta\sin\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\cos\varphi\\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi\\ \cos\varphi & 0 & -r\sin\varphi\end{pmatrix}$ et dont le déterminant vaut $-r^2\sin\varphi$. Si les coordonnées cartésiennes définissent un domaine A, alors les sphériques définissent un domaine B et on a $\displaystyle\int_A f(x,y,z)dxdydz=\int_B f(g(r,\theta,\varphi))\left|r^2\sin\varphi\right|drd\theta d\varphi$.

Application : le volume d'une sphère de rayon R est donné par $f(x,y,z)=1$ (indicatrice de A) sur $A=\{x,y,z\,/\,x^2+y^2+z^2\le R^2\}$: $\displaystyle\int_A 1.dxdydz=\int_\alpha^\beta\left(\int_{p(x)}^{q(x)}\left(\int_{u(x,y)}^{v(x,y)}dz\right)dy\right)dx$ où les bornes indiquent les zones de variation successives pour chaque variable… ; en passant en sphériques on a $\tilde f(r,\theta,\varphi)=1$ d'où le calcul sur $B=[0,R]\times[0,2\pi]\times[0,\pi]$ de

$$\int_B\left|r^2\sin\varphi\right|drd\theta d\varphi=\int_0^\pi\sin\varphi\left(\int_0^{2\pi}\left(\int_0^R r^2dr\right)d\theta\right)d\varphi=\int_0^\pi\sin\varphi\left(\int_0^{2\pi}\frac{1}{3}R^3d\theta\right)d\varphi$$

$$=\int_0^\pi\frac{2\pi}{3}R^3\sin\varphi d\varphi=\frac{4\pi}{3}R^3$$

5. Une application



Les sinusoïdes elliptiques sont en général de bonnes approximations de la forme des lacs : le bord du lac a la forme d'une ellipse d'équation $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ (a, $b>0$) et sa forme générale est

$f(x,y)=p\cos\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}\right)$ où p est la profondeur du lac et $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1$. On va chercher la profondeur moyenne p_m d'un lac ainsi que son volume V.

Si S est la surface du lac et si $|f(x,y)|$ est la profondeur au point (x, y) alors $V=\int_S |f(x,y)|dxdy$; faisons le changement de variables $\begin{cases} x=ua \\ y=vb \end{cases}$, dont la matrice jacobienne est $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ et le jacobien ab.

La région S d'intégration (l'ellipse initiale) se transforme alors en un disque D de rayon 1 : $D=\{(u,v)/u^2+v^2\le 1\}$ et nous avons alors $V=abp\int_D \cos\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{u^2+v^2}\right)dudv$; faisons un nouveau changement de variables et passons en coordonnées polaires (on aurait pu le faire dès le début bien sûr), ce qui nous donne avec $\begin{cases} u=r\cos\theta \\ v=r\sin\theta \end{cases}$ un jacobien égal à r et $V=abp\int_0^{2\pi}\int_0^1 r\cos\left(\frac{\pi}{2}r\right)drd\theta$.

Calculons l'intégrale en r par parties :

$$\int_0^1 r\cos\left(\frac{\pi}{2}r\right)dr=\left[\frac{4}{\pi^2}\cos\left(\frac{\pi}{2}r\right)+\frac{2}{\pi}r\sin\left(\frac{\pi}{2}r\right)\right]_0^1=\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi^2}$$

et finalement $V=abp\int_0^{2\pi}\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi^2}d\theta=abp\left(4-\frac{8}{\pi}\right)\approx 1,45abp.$

La profondeur moyenne est le volume divisé par l'aire de l'ellipse $ab\pi$, soit ici $p_m=\frac{1,45abp}{ab\pi}\approx 0,463p$.

Une étude portant sur 107 lacs du monde entier a donné une valeur de $\frac{p_m}{p}$ d'environ 0,467…