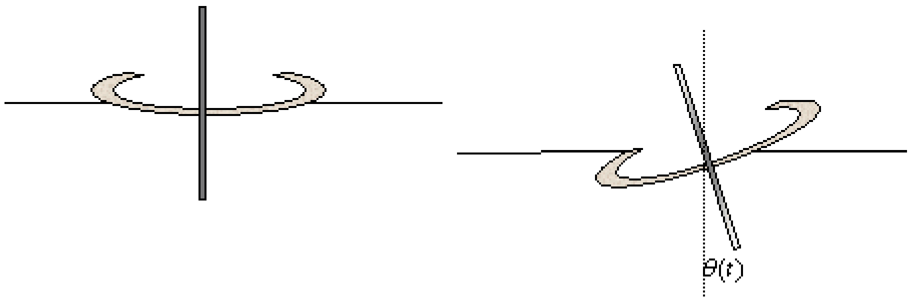
Bateau et Vagues…

Lorsque le bateau tangue sur la mer déchaînée, Dieu seul sait s'il va se retourner… La « route du Rhum » 2002 nous en a encore montré l'exemple : sur 18 trimarans engagés, seuls 3 sont arrivés à bon port. Une partie de l'explication est relativement aisée à comprendre…

Pour simplifier le problème considérons un bateau naviguant sur une mer formée où les vagues ont une certaine amplitude F et une fréquence ω ; à l'instant initial $t=0$, le bateau possède une certaine gîte θ_0 ainsi qu'une certaine vitesses angulaire v_0.



Les forces qui agissent sur le bateau sont alors un couple de rappel proportionnel à la masse du bateau et au double de l'angle de gîte : approximativement de la forme $-K\sin 2\theta(t)$ (ce terme dépend de la forme du bateau, de la répartition des masses, etc.), un terme de frottement visqueux, proportionnel à la vitesse angulaire du bateau : $-c\dfrac{d\theta}{dt}$, et la pulsation donnée par la vague : $F\sin(\omega t)$; comme dans le cas du pendule classique, la force principale qui opère est l'accélération angulaire : $m\dfrac{d^2\theta}{dt^2}$, le système est alors décrit par l'équation différentielle :

$$m\frac{d^2\theta}{dt}+F\sin(\omega t)=-c\frac{d\theta}{dt}-K\sin 2\theta\ .$$

Cette équation ne s'intègre pas (on s'en serait douté) mais la méthode d'Euler donne une approche assez satisfaisante :

$\dfrac{d\theta}{dt}=v$ d'où $\dfrac{d^2\theta}{dt^2}=\dfrac{dv}{dt}$, ce qui nous donne en posant $\dfrac{dv}{dt}=\dfrac{v(t+\partial t)-v(t)}{\partial t}$ et $\dfrac{d\theta}{dt}=\dfrac{\theta(t+\partial t)-\theta(t)}{\partial t}$:

$$\begin{cases}\theta(t+\partial t)=\theta(t)+\partial t v(t)\\ v(t+\partial t)=v(t)+\partial t\left[-cv(t)-K\sin 2\theta(t)-F\sin\omega t\right]\end{cases}.$$

Faisons un premier essai avec les paramètres suivants :

$$\theta_0=0,\ v_0=40\ °s^{-1},\ c=0,\ K=0{,}21,\ F=0{,}5,\ \omega=2$$

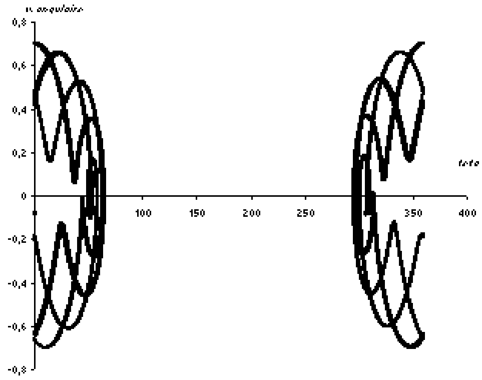


fig- 1 : angle et vitesse angulaire

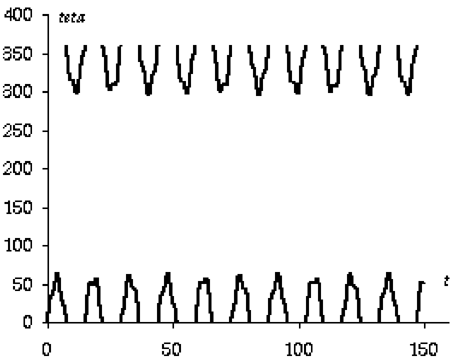


fig- 2 : angle en fonction du temps

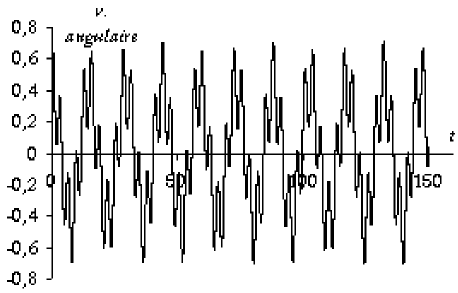


fig- 3 : vitesse angulaire en fonction du temps

Que lisons nous sur ces figures ? La fig. 1 est le portrait de phase pour ces paramètres, sur la partie gauche le bateau est à l'endroit et stable, sur la partie droite le bateau est à l'envers et stable. Les dents de la fig. 2 montrent les retournements successifs : en bas à l'endroit, en haut à l'envers.

Changeons légèrement les paramètres : $v_0 = 67,5°.s^{-1}$

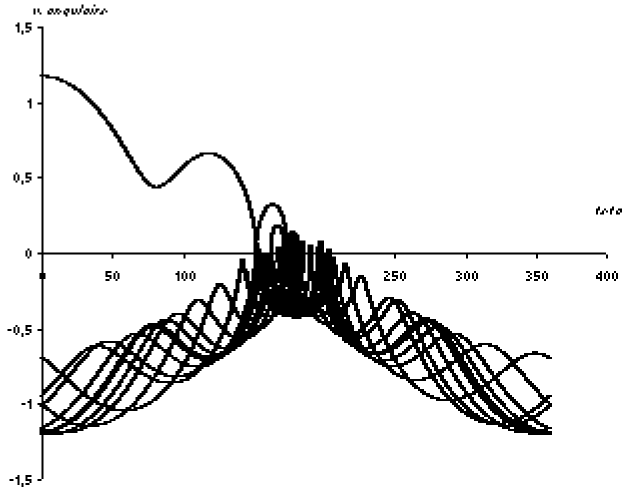


fig- 4 : angle et vitesse angulaire

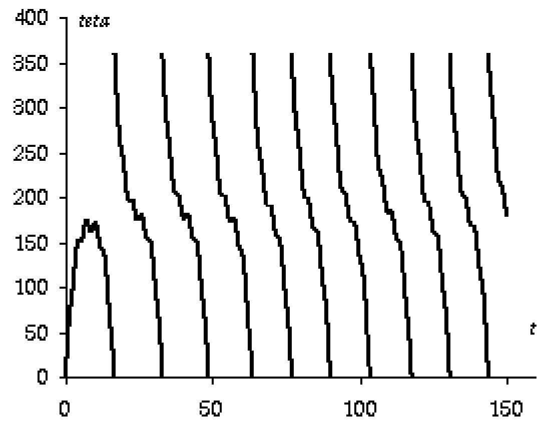


fig- 5 : angle en fonction du temps

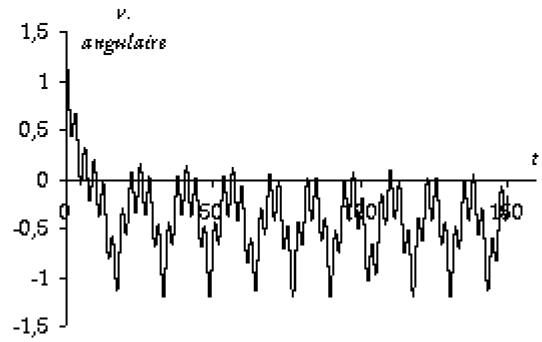


fig- 6 : vitesse en fonction du temps

Les deux blocs se sont rejoints, et on passe ainsi des positions à l'endroit aux positions à l'envers sans discontinuité : le chavirage ne prévient pas. On pourrait penser que la fréquence des vagues joue un rôle important dans l'affaire, mais ce n'est pas le cas comme le montrent les figures suivantes obtenues avec $\omega = 1$:

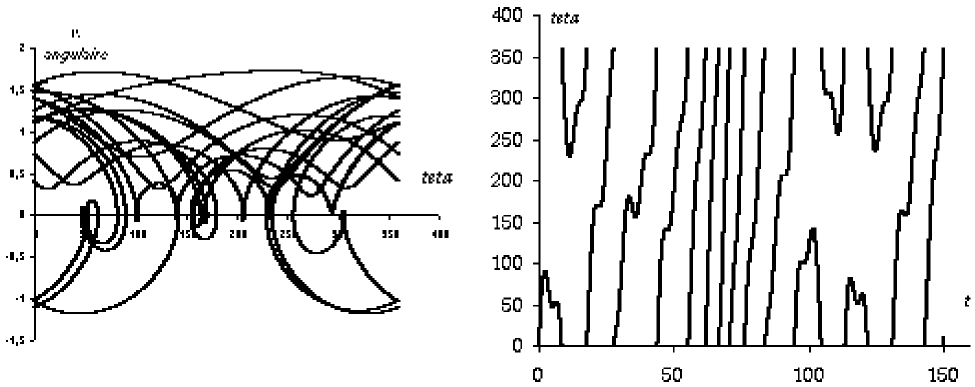


fig- 7 : une vague par seconde

Le facteur fondamental dans l'histoire est le terme $\sin 2\theta(t)$ dans l'équation différentielle qui provoque les phénomènes chaotiques dès que θ n'est pas petit (remarquez que si vous augmentez K, le phénomène se calme nettement et il est plus difficile d'obtenir des trajectoires chaotiques : il est plus dur de faire se retourner un porte-avions qu'un catamaran de course).

Il est bien clair qu'il est impossible d'explorer toutes les possibilités à la main, aussi allons nous suivre quelques trajectoires sur un laps de temps quelconque en changeant uniquement l'angle initial et la vitesse initiale. D'autre part nous ne tracerons un point sur le graphique que lorsque le bateau est au sommet d'une vague, soit lorsque ωt est un multiple de 2π. En fait les trajectoires dans l'espace des phases décrivent une sorte de tore (entortillé…) et les points que nous tracerons sont donc les intersections des trajectoires avec un plan : tous les 2π la trajectoire retraverse le même plan et laisse une trace sur ce plan ; nous faisons donc la *section de Poincaré* des trajectoires. Les paramètres utilisés ici sont $-180° \leq \theta_0 \leq 180°$, $-2\ \text{rad.s}^{-1} \leq v_0 \leq 2\ \text{rad.s}^{-1}$, $K=1$, $\omega = 2$, $c=0$, $F=0{,}5$.

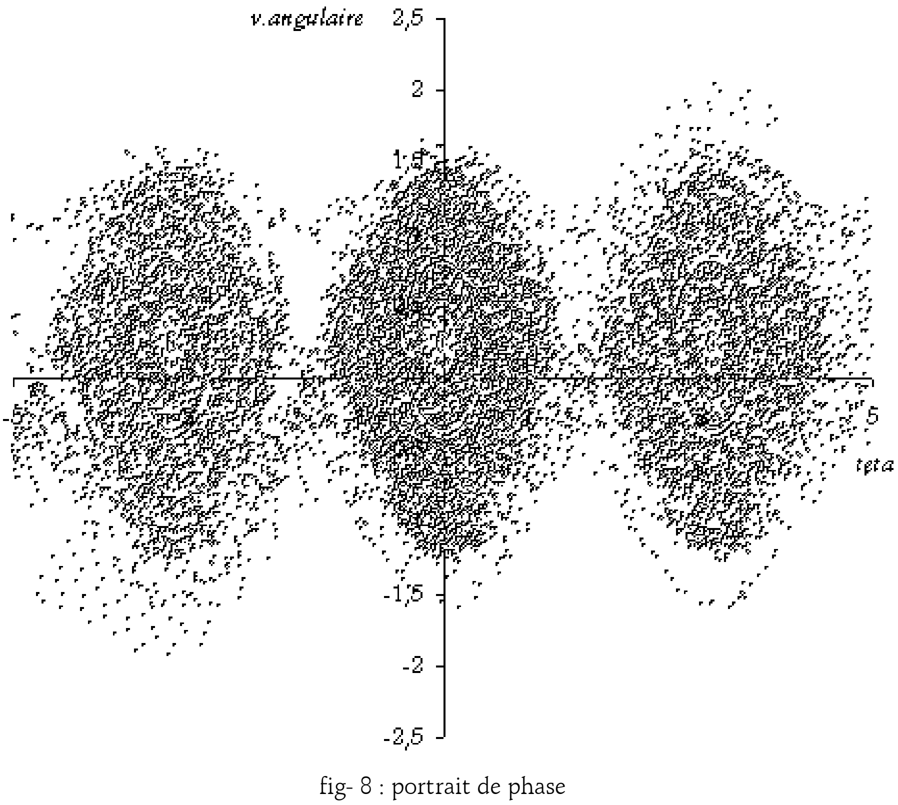


fig- 8 : portrait de phase

Les figures obtenues, comme dans le cas du pendule, présentent grosso-modo trois types de zones :

- des sortes de boucles où l'on reconnaît la présence d'un attracteur classique, le bateau tangue mais ne chavire pas ;
- des espèces de lignes ondulées qui correspondent à des séries successives de chavirages, dus en général à une trop grande vitesse de rotation du bateau
- une zone intermédiaire où le bateau peut passer d'une situation stables à une situation instable sans prévenir : il n'y a pas d'attracteur pour la trajectoire et on ne peut dire à l'avance quand le bateau se retournera.