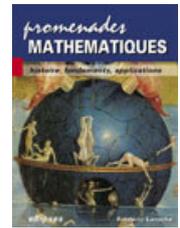


## Applications des fonctions de Bessel



[accueil](#)

Fichier Pdf

*Je compterai toujours, pour ma part, au nombre des heures les plus douces, les plus heureuses de ma vie, celles où j'ai pu saisir dans l'espace et étudier sans trêve quelques-uns de ces êtres géométriques qui flottent en quelque sorte autour de nous.*

Gaston Darboux

*Avertissement : les quelques thèmes présentés ici ne représentent qu'une infime partie des applications des fonctions de Bessel. L'auteur essaiera d'apporter des compléments ultérieurs à ces questions.*

1. Tache d'Airy
  - 1-a : Tache simple
  - 1-b : Tache double
  - 1-c : Fonction d'Airy
  - 1-d : Caustique
2. Membranes
  - 2-a : Equation du mouvement
  - 2-b : Vibrations libres
  - 2-c : Vibrations libres à symétrie de révolution
  - 2-d : Vibrations forcées
  - 2-e : Vibrations d'une membrane circulaire
3. Les équations de Maxwell
  - 3-a :  $B_1 = 0$  : onde transverse magnétique ou onde électrique
  - 3-b :  $E_1 = 0$  : onde transverse électrique ou onde magnétique
  - 3-c : Cas où le champ est une fonction sinusoidale du temps
  - 3-d : Oscillations électromagnétiques dans une cavité en forme de parallélépipède
  - 3-e : Oscillations électromagnétiques dans une cavité en forme de cylindre de révolution
  - 3-f : Oscillations électromagnétiques dans une cavité en forme de cylindre de révolution de longueur infinie
  - 3-g : Le cas du guide coaxial



## 1. Tache d'Airy

### 1-a : Tache simple

Nous avons vu (dans le livre, bien sûr) que lorsqu'un objet est placé sur l'axe optique d'une pupille on pouvait utiliser l'approximation de Fraunhofer pour déterminer la figure de diffraction obtenue, ce qui revenait grosso-modo à calculer la transformée de Fourier de la fonction caractéristique du diaphragme transmettant la lumière. L'intensité lumineuse reçue dans le plan image s'appelle la *réponse impulsionnelle incohérente* (à cause de l'incohérence de la lumière incidente).

Si  $P(x, y)$  est la fonction de transfert du diaphragme, on a

$$(1.a.1) \quad I_d(X, Y) = \frac{1}{\lambda^2 R} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} P(x, y) e^{-2i\pi \left( \frac{xX}{\lambda R} + \frac{yY}{\lambda R} \right)} dx dy \right|^2$$

où  $R$  est la distance de la pupille au plan image sur l'axe focal,  $X$  et  $Y$  les distances à l'axe focal dans le plan image du point considéré et  $\lambda$  la longueur d'onde.

Considérons un diaphragme circulaire de diamètre  $D$  dont la fonction de transfert est

$$P(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq r \leq D/2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Introduisons les coordonnées polaires  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $\theta = \arctan \frac{y}{x}(\pi)$ ,  $R = \sqrt{X^2 + Y^2}$  et  $\phi = \arctan \frac{Y}{X}(\pi)$ ,

nous avons alors en posant  $\rho = \frac{R}{\lambda d}$  :

$$\hat{P}(\rho) = \int_0^{D/2} \int_0^{2\pi} e^{-2i\pi[\rho r(\cos\theta\cos\phi + \sin\theta\sin\phi)]} r dr d\theta = \int_0^{D/2} r dr \int_0^{2\pi} e^{-2i\pi[\rho r\cos(\theta-\phi)]} d\theta.$$

On reconnaît dans la deuxième intégrale la fonction de Bessel d'ordre 0,  $J_0(2\pi\rho r)$ , ce qui nous donne

$$\hat{P}(\rho) = \int_0^{D/2} 2\pi r J_0(2\pi\rho r) dr = \frac{1}{2\pi\rho^2} \int_0^{\pi\rho D} u J_0(u) du = \frac{1}{2\pi\rho^2} \pi\rho D J_1(\pi\rho D) = \frac{\pi D^2}{4} \frac{2J_1(\pi\rho D)}{\pi\rho D}.$$

Au point de coordonnées polaires ( $R = \lambda d\rho$ ,  $\phi$ ) on trouve donc l'amplitude complexe  $\psi(R) = \hat{P}(\rho)$  et l'intensité

$$(1.a.2) \quad I(R) = |\psi(R)|^2 = \left( \frac{\pi D^2}{4} \right)^2 \left[ \frac{2J_1(\pi\rho D)}{\pi\rho D} \right]^2.$$

Dans le cas d'un télescope le plan image est le plan focal image primaire de l'appareil et la pupille de sortie coïncide pratiquement avec la lentille primaire de l'instrument ou avec le miroir primaire ;  $d$  est alors la distance focale image  $f$ .

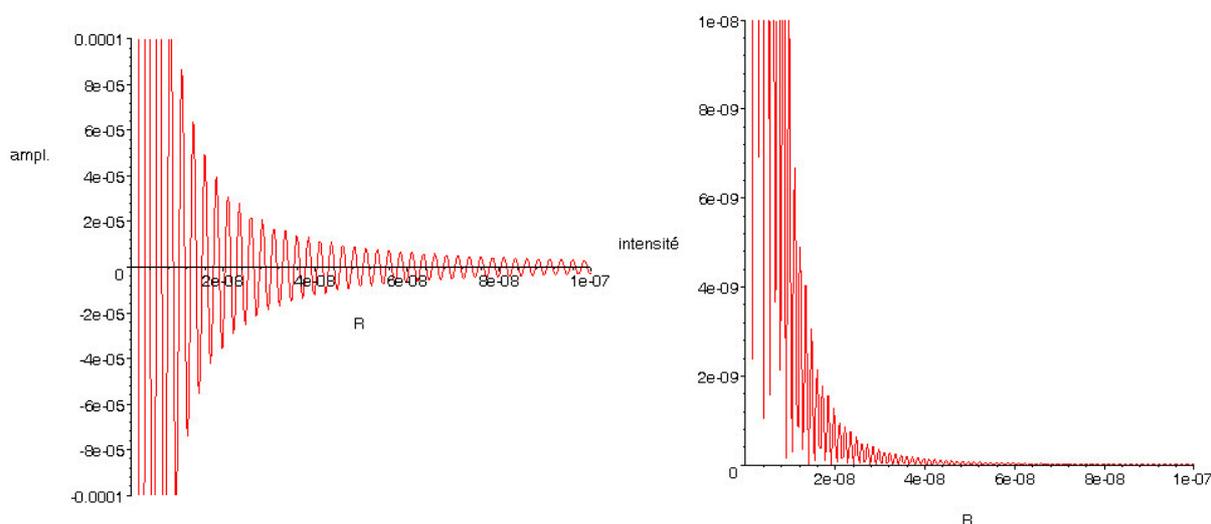


fig. 1 : amplitude et intensité en fonction de  $R$  ( $\lambda = 2.5E-10$  m,  $D = 0.1$  m,  $d = 0.5$  m)

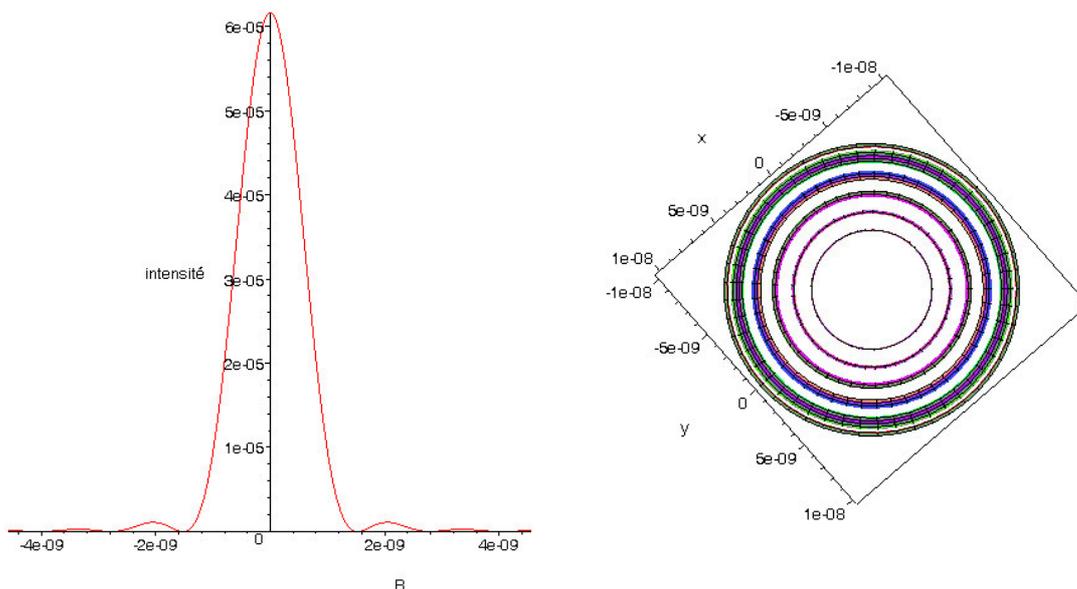


fig. 2 : Figure de gauche : intensité autour de 0. Figure de droite : tache d'Airy ; les traits noirs correspondent aux intensités ; le blanc est noir...

On voit ainsi apparaître une tache de diffraction qui perturbe évidemment le traitement de l'image. Mais il y a pire encore : imaginons que nous regardons deux étoiles dans un télescope, chaque étoile formera une tache, chaque tache recouvrant en partie l'autre. Dans quelle mesure peut-on séparer les deux ?

### 1-b : Tache double

Lorsque deux sources « proches » de lumière incohérente sont vues à travers un instrument à pupille circulaire, chacun produit une tache d'Airy ; on appelle alors critère de Rayleigh le critère de séparation de ces taches : on admet que ces taches ne peuvent être séparées que si le maximum de la figure d'Airy relative à un des points est situé sur ou au-delà du premier minimum de la figure d'Airy relative à l'autre.

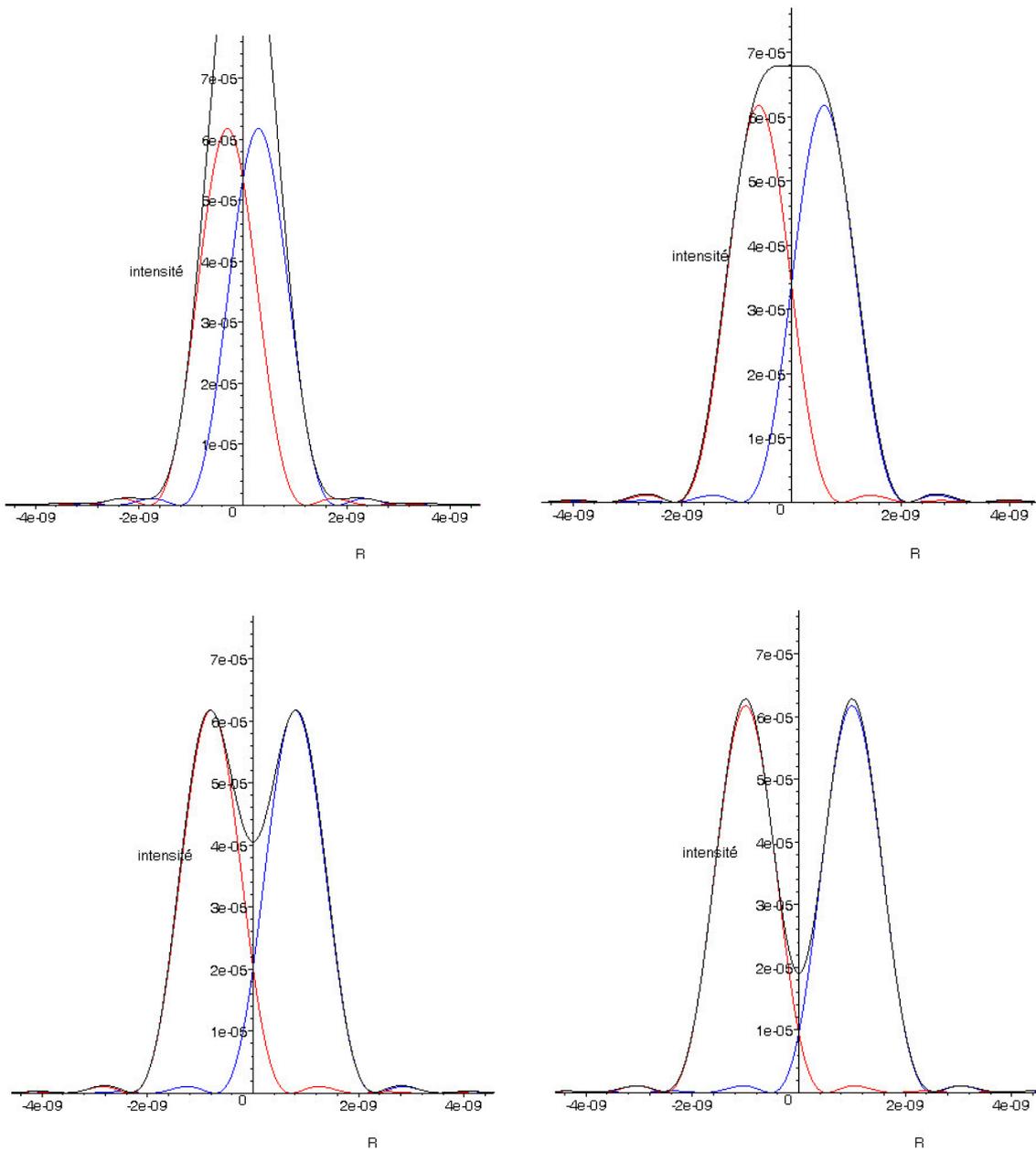
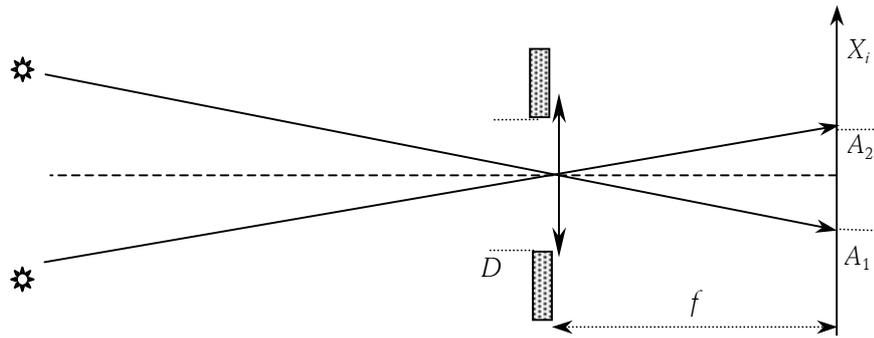


fig. 3 : Représentations de l'intensité émise par deux sources séparées de  $\Delta X_i$ , ainsi que de leur somme.

Comme on le voit sur les figures, dans les deux premiers cas il n'y a pas de minimum d'intensité permettant la séparation des sources, dans le dernier cas il y a une « trop » bonne séparation. Le critère de

séparation correspond à une baisse d'intensité centrale d'environ 25 % et s'écrit si la distance focale est  $f$  :

$$\Delta X_i \geq \frac{1,22\lambda f}{D}$$

où  $D$  est le diamètre de la pupille.

A l'heure actuelle, vu la précision des instruments modernes, on ne se satisfait pas de ce critère : voir J. P. Pérez, Optique, pp 390 et sq.

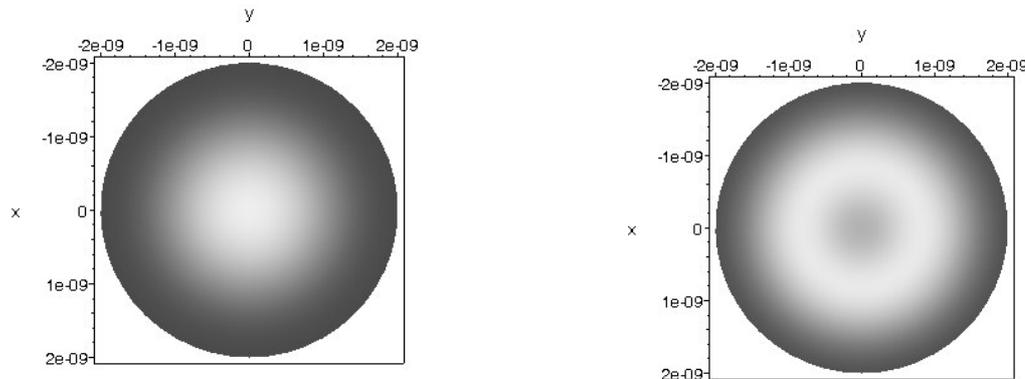


fig. 4 : Différences de luminosité suivant le critère de séparation.

Voir

<http://www.essi.fr/~leroux/crim2/>

[http://perso.wanadoo.fr/sebastien.caille/test\\_doubles.htm](http://perso.wanadoo.fr/sebastien.caille/test_doubles.htm)

#### 1-c : Fonction d'Airy

Les paragraphes suivants reprennent quelques extraits de textes trouvés sur internet. Vous avez tout intérêt à consulter ces derniers.

##### a. Elasticité

Introduite en 1838 par l'astronome britannique G. Airy pour modéliser l'arc-en-ciel, la fonction d'Airy peut être vue comme le premier échelon d'une hiérarchie infinie de "fonctions spéciales" pouvant modéliser les phénomènes ondulatoires (le 2<sup>ème</sup> échelon correspond à l'oscillateur harmonique et le 4<sup>ème</sup> à l'oscillateur anharmonique en mécanique quantique). Les modèles d'ordre supérieur se ramènent localement à ceux d'ordre inférieur par des changements de variables donnés sous forme de séries de puissances d'un petit "paramètre d'échelle". Dès 1848 Stokes avait utilisé un tel changement de variables pour calculer numériquement les zéros de la fonction d'Airy (les franges de l'arc-en-ciel), en ramenant celle-ci à une fonction sinusoïdale (l'échelon zéro de ma hiérarchie). Longtemps mal compris à cause du caractère divergent des séries, ce calcul de Stokes peut aujourd'hui être vu comme une magnifique introduction à la théorie de la résurgence d'Ecale.

<http://esm2.imt-mrs.fr/gar/elashtml/courselasnode20.html>

##### b. Les Fonctions d'Airy pour la Physique (un ouvrage de O.Vallée et M.Soarès)

George Biddel Airy est né le 27 juillet 1801 à Alnwick, dans le Northumberland. Issu d'un milieu rural modeste, il fait ses études au Trinity College de Cambridge, dont il est diplômé en 1823. Puis il y devient professeur de mathématiques en 1826. En 1828, il est nommé professeur d'astronomie et directeur du nouvel observatoire de Cambridge. C'est à cette époque que Airy s'intéresse entre autres à la masse de Jupiter et qu'il étudie les irrégularités dans les mouvements relatifs de la Terre et de Vénus. En 1834, Airy lance les premières études mathématiques sur les motifs de diffraction. La diffraction sur les bords d'une lentille fait que l'image d'un point est une tache de lumière entourée d'une série d'anneaux concentriques d'intensité décroissante qui porte le nom de disque d'Airy. En juin 1835, Airy devient le septième astronome royal (directeur de l'observatoire de Greenwich). Sous son administration, un équipement moderne est installé, et l'observatoire acquiert une renommée mondiale, tant par son organisation que par la qualité des données publiées. Airy est anobli en 1872 et devient Sir George Airy. En 1881, Sir George quitte son poste d'astronome royal et s'éteint à Greenwich le 2 janvier 1892.

Airy laisse son nom à divers phénomènes, tels que la spirale d'Airy ou la tache d'Airy (point central d'une figure de diffraction). Airy s'intéressa aussi à l'optique, et c'est en calculant l'intensité lumineuse au voisinage d'une caustique (1838), qu'il introduisit la fonction d'Airy.

<http://www.univ-orleans.fr/SCIENCES/LASEP/OVallee/> - book

c. Un site absolument remarquable sur l'Arc en ciel

<http://perso.wanadoo.fr/sam.electroastro/dossiers/arc-en-ciel/arc-en-ciel.htm>

L'équation différentielle

$$y''(z) - zy(z) = 0$$

se retrouve de manière particulièrement fréquente en Physique. La résolution en est immédiate : on fait le changement de variable  $y(z) = \sqrt{z}u\left(\frac{2}{3}iz^{\frac{3}{2}}\right)$ , ce qui donne  $u''(z) + \frac{1}{z}u'(z) + \left(1 - \frac{1}{9z^2}\right)u(z) = 0$  et donc une équation de Bessel. La solution  $u$  est une fonction cylindrique d'ordre  $\frac{1}{3}$  donc non entier, ce qui donne pour  $y$  :

$$y(z) = \sqrt{z} \left( C_1 J_{\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3}iz^{\frac{3}{2}}\right) + C_2 J_{-\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3}iz^{\frac{3}{2}}\right) \right).$$

Ceci dit, un des intérêts de cette fonction est lié aux propriétés de l'équation différentielle dont elle est solution ; cette dernière est une des plus simples présentant un *point de transition* : ceci signifie que si dans une équation du type  $x'' + n(z)x = 0$  la fonction  $n$  change de signe au voisinage d'une valeur  $z_0$ , alors  $z_0$  est appelé point de transition.

En fait lorsque  $n(z) > 0$ , l'équation  $x'' + n(z)x = 0$  présente des solutions oscillantes alors que pour  $n(z) < 0$  on a plutôt des solutions exponentielles ; le point  $z_0$  représente donc un changement important de comportement des solutions et donc du système sous-jacent.

Reprenons  $y''(z) - zy(z) = 0$  et utilisons la transformée de Laplace (équations différentielles linéaires), avec  $n = 2, a_0 = -1, a_1 = a_2 = b_0 = b_1 = 0, b_2 = 1$  d'où  $P(u) = -1$  et  $Q(u) = u^2$ . On a alors l'équation en  $v$  :

$$\frac{1}{v} \frac{dv}{du} = \frac{Q(u)}{P(u)} \Leftrightarrow \frac{1}{v} \frac{dv}{du} = -u^2 \Leftrightarrow \ln|v| = -\frac{1}{3}u^3 + K \Leftrightarrow v = ke^{-\frac{1}{3}u^3}$$

d'où la solution

$$w(z) = \int_C v(u)e^{uz} du = k \int_C e^{uz - \frac{1}{3}u^3} du.$$

Le terme  $\left[ v(u)e^{uz} P(u) \right]_C = \left[ -e^{uz - \frac{1}{3}u^3} \right]_C$  doit s'annuler, ce qui sera certainement le cas lorsque  $C$

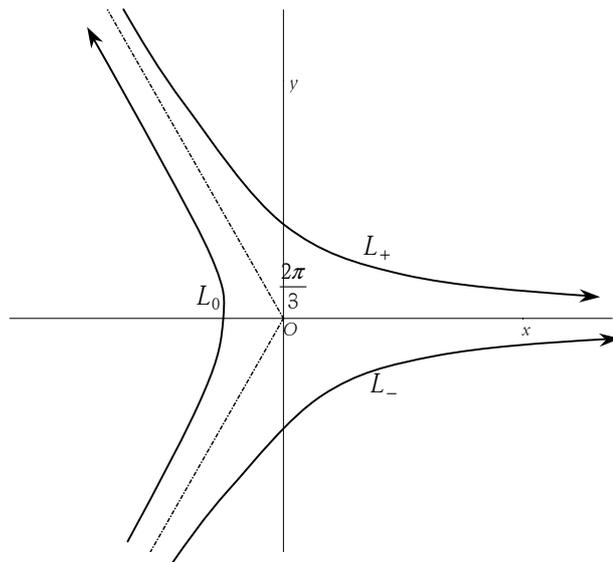
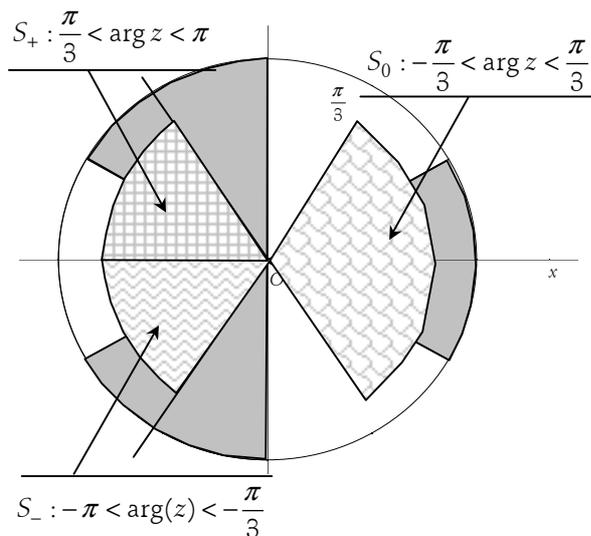
contiendra l'infini aux deux extrémités des régions où  $\text{Re}(u^3) > 0$ , soit dans les zones grisées de la figure de gauche.

Si on prend par exemple comme « contour » l'axe imaginaire, on obtient la solution

$$w(z) = ik \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\left(zy + \frac{1}{3}y^3\right)} dy = 2ik \int_0^{+\infty} \cos\left(zy + \frac{1}{3}y^3\right) dy$$

où  $y$  et  $z$  sont réels.

Un autre type de contour considéré sera celui représenté sur la figure de droite.



Sur chaque contour,  $L_+$ ,  $L_-$ ,  $L_0$  on a une solution, soit

$$w_+(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_+} e^{uz - \frac{1}{3}u^3} du, \quad w_-(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_-} e^{uz - \frac{1}{3}u^3} du \quad \text{et} \quad w_0(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_0} e^{uz - \frac{1}{3}u^3} du.$$

Il ne peut y avoir trois solutions linéairement indépendantes, et on remarque d'ailleurs que

$$w_-(z) - w_+(z) = w_0(z).$$

L'objectif est ici d'obtenir des représentations asymptotiques pour chacune de ces solutions en utilisant le *Lemme de Watson* (on rappelle ici ledit lemme : supposons qu'au voisinage de  $z = 0$  la fonction  $F(z)$  possède le développement  $F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{\frac{k}{r}-1}$  avec  $|z| \leq a$  et  $r > 0$  et qu'il existe des constantes  $K$  et  $b$  positives telles

que  $|F(z)| < Ke^{b|z|}$  lorsque  $|z| \geq a$ , alors pour  $|\nu|$  grand, on a  $\tilde{F}(\nu) = \int_0^{\infty} e^{-\nu z} F(z) dz \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n \Gamma\left(\frac{n}{r}\right) \nu^{-\frac{n}{r}}$  pour  $-\frac{\pi}{2} < \arg(\nu) < \frac{\pi}{2}$ ).

On commence avec  $w_0$  : on a  $f(u) = uz - \frac{1}{3}u^3$  d'où  $f'(u) = z - u^2$ ,  $f''(u) = -2u$  et  $f'''(u) = -2$  ;  $f'$  s'annule pour  $u = \pm\sqrt{z}$  (détermination principale). Prenons  $z$  dans  $S_0$  : on a alors  $\sqrt{z}$  et  $-\sqrt{z}$  tels que

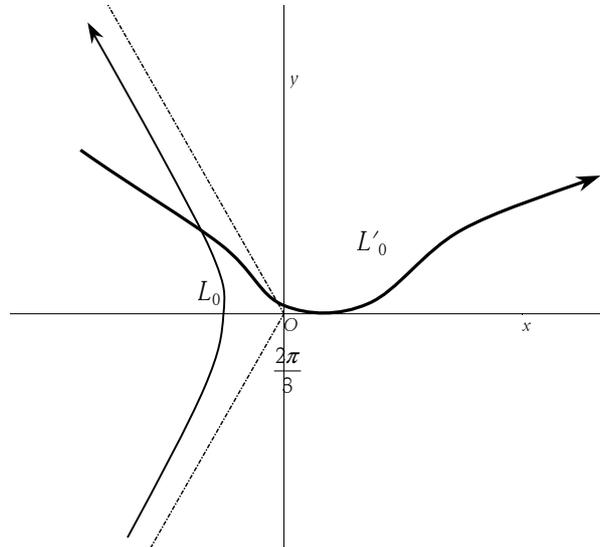
$$\begin{cases} \arg(-\sqrt{z}) = \pi + \frac{1}{2}\arg(z) \Rightarrow \frac{5\pi}{6} < \arg(-\sqrt{z}) < \frac{7\pi}{6} \\ \arg(\sqrt{z}) = \frac{1}{2}\arg(z) \Rightarrow -\frac{\pi}{6} < \arg(\sqrt{z}) < \frac{\pi}{6} \end{cases};$$

$\sqrt{z}$  ne peut alors être sur  $L_0$ , par contre  $-\sqrt{z}$  peut y être.

Développons  $f$  en série de Taylor au voisinage de  $-\sqrt{z}$  :  $f(u) = -\frac{2}{3}z^{3/2} + \sqrt{z}(u + \sqrt{z})^2 - \frac{1}{3}(u + \sqrt{z})^3$  et

$$w_0(z) = \frac{e^{-\frac{2}{3}z^{3/2}}}{2\pi i} \int_{L_0} e^{\sqrt{z}(u+\sqrt{z})^2 - \frac{1}{3}(u+\sqrt{z})^3} du.$$

Pour obtenir notre développement on effectue le changement de variable  $v = -iz^{1/4}(u + \sqrt{z})$ ,  $dv = -iz^{1/4} du$  et le contour image est l'image de  $L_0$  par rotation de  $-\frac{\pi}{2}$ , « écrasement » autour de 0 et translation.



$$\text{On a alors } w_0(z) = \frac{z^{-1/4} e^{-\frac{2}{3}z^{3/2}}}{2\pi} \int_{L'_0} e^{-v^2} \exp\left(i \frac{1}{3} z^{-\frac{3}{4}} v^3\right) dv.$$

Ecrivons le développement en série de la deuxième exponentielle :

$$\exp\left(i \frac{1}{3} z^{-\frac{3}{4}} v^3\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(i \frac{1}{3} z^{-\frac{3}{4}} v^3\right)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} i^n \frac{v^{3n}}{3^n z^{\frac{3n}{4}} n!},$$

remplaçons et intervertissons somme et intégrale :

$$w_0(z) = \frac{z^{-1/4} e^{-\frac{2}{3}z^{3/2}}}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{3^n z^{\frac{3n}{4}} n!} \int_{L'_0} e^{-v^2} v^{3n} dv,$$

ce qui donne d'après le Lemme de Watson

$$w_0(z) \sim \frac{z^{-1/4} e^{-\frac{2}{3}z^{3/2}}}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{i}{3z^{3/4}}\right)^{2n} \frac{\Gamma\left(3n + \frac{1}{2}\right)}{(2n)!} = \frac{z^{-1/4} e^{-\frac{2}{3}z^{3/2}}}{2\sqrt{\pi}} + \dots, \text{ avec } z \in S_0.$$

De la même manière on obtient, toujours avec  $z \in S_0$  :

$$w_+(z) \sim \frac{z^{-1/4} e^{\frac{2}{3}z^{3/2}}}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3z^{3/4}}\right)^{2n} \frac{\Gamma\left(3n + \frac{1}{2}\right)}{(2n)!} = \frac{z^{-1/4} e^{\frac{2}{3}z^{3/2}}}{2i\sqrt{\pi}} + \dots$$

et la même chose pour  $w_-(z)$ .

### 1-d : Caustique

A titre d'exemple d'utilisation des fonctions d'Airy nous étudions l'intensité lumineuse au voisinage et sur la caustique d'une surface réfléchissante.



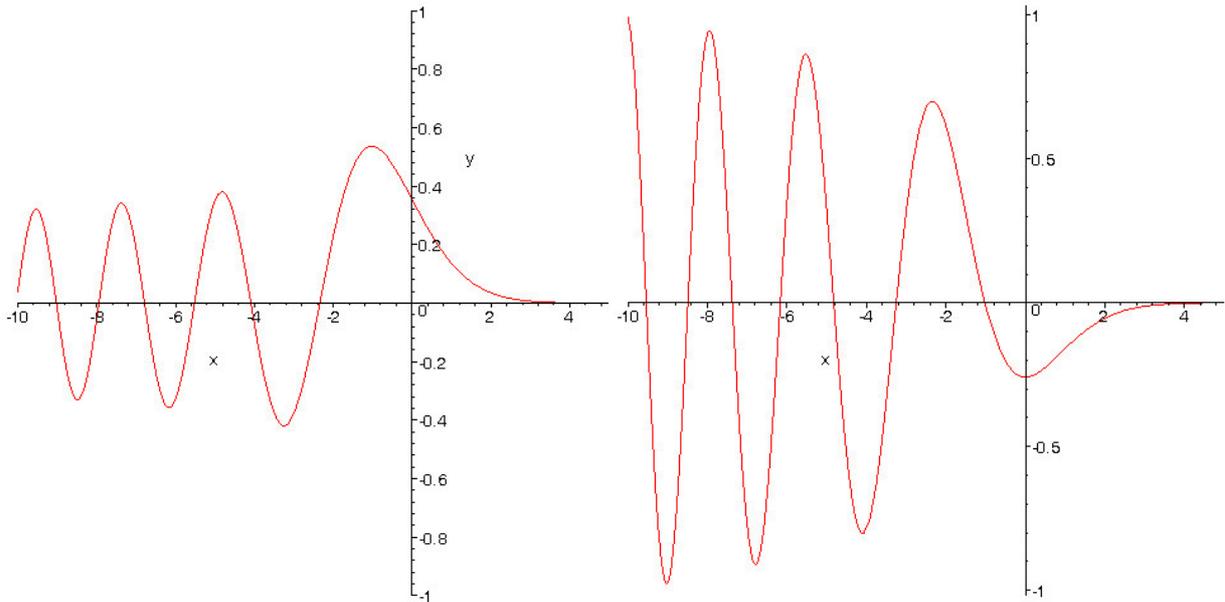


fig. 5 : fonction d'Airy et sa dérivée première.

Lorsque  $\delta > 0$ ,  $F$  est dans la « zone d'ombre » de la caustique et l'amplitude décroît exponentiellement.

Lorsque  $\delta < 0$ , l'amplitude oscille de moins en moins fort à mesure que l'on s'écarte de la caustique. Cette amplitude a un premier maximum, non pas sur la caustique elle-même mais légèrement avant ; ce maximum est obtenu pour le premier zéro, qui est environ en  $x = -1,0188$ .

Il est remarquable que le résultat ne dépende pas de la forme de  $S$  ni de celle de la caustique.



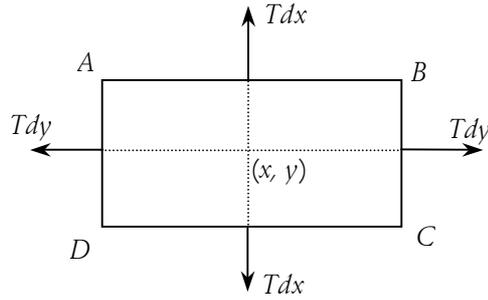
## 2. Membranes

### 2-a : Equation du mouvement

Considérons un élément rectangulaire d'une fine membrane élastique de densité uniforme  $\sigma$  soumis à une tension uniforme  $T$ . Prenons le plan  $z = 0$  comme plan de la membrane ; chacun des côtés du rectangle  $ABCD$  sont soumis à une force proportionnelle à  $T$  et au déplacement du côté ; ces forces sont orientées tangentiellement au plan du déplacement (en fait c'est exactement la même démarche que pour l'équation des ondes sauf que nous sommes en deux dimensions). Un petit déplacement vertical au point  $(x, y)$  dans

la direction  $y$  est alors  $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{y+dy} - \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_y$  et l'intensité de la force dans cette direction est  $Tdx$ , soit

$$Tdx \left[ \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{y+dy} - \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_y \right] = Tdx \left[ \frac{\partial z}{\partial y}(y+dy) - \frac{\partial z}{\partial y}(y) \right] \approx Tdx dy \left[ \frac{\frac{\partial z}{\partial y}(y+dy) - \frac{\partial z}{\partial y}(y)}{dy} \right] = T \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dx dy .$$



On a évidemment le même résultat dans la direction  $x$  d'où une force totale due à la tension de la membrane  $T \left( \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right) dx dy$ . Si maintenant on applique en tout point une force  $p(x, y, t)$  dépendant du temps, la force totale appliquée en  $(x, y)$  s'exprime par  $\left[ T \left( \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right) + p(x, y, t) \right] dx dy$ . Il reste à appliquer la loi de Newton : la masse de l'élément rectangulaire est  $\sigma dx dy$  et dans la direction  $z$  l'accélération est  $\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$  d'où l'équation du mouvement  $\left[ T \left( \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right) + p(x, y, t) \right] dx dy = \sigma \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} dx dy$ , soit avec  $\frac{1}{c^2} = \frac{\sigma}{T}$  :

$$(2.a.1) \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \frac{p(x, y, t)}{T} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}.$$

### 2-b : Vibrations libres

Nous retrouvons ici en prenant  $p(x, y, t) = 0$  l'équation des ondes standard avec les conditions aux limites suivantes :  $z = f(x, y)$  et  $\frac{\partial z}{\partial t} = g(x, y)$  à  $t = 0$ . Nous allons évidemment utiliser la transformée de Fourier dans ce cas comme dans le cas à une seule dimension. Soit  $z(x, y, t)$  la solution cherchée et  $\hat{z}(u, v, t)$  sa TF. Nous avons

$$\hat{z}(u, v, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} z(x, y, t) e^{i(ux+vy)} dx dy \text{ et}$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right) e^{i(ux+vy)} dx dy = -(u^2 + v^2) \hat{z}(u, v, t)$$

comme dans le cas de fonctions d'une seule variable (voir par exemple **Vibrations des poutres**). Ceci suppose évidemment que  $z$ ,  $\frac{\partial z}{\partial x}$  et  $\frac{\partial z}{\partial y}$  tendent vers 0 lorsque  $x^2 + y^2$  tendent vers l'infini, conditions évidemment réalisées grâce aux conditions de bord.

L'équation (2.a.1) devient alors  $\frac{d^2 \hat{z}}{dt^2} + c^2(u^2 + v^2) \hat{z} = 0$  dont les solutions sont de la forme  $A \cos \mu t + B \sin \mu t$  avec  $\mu^2 = c^2(u^2 + v^2)$ . Notons  $\hat{f}(u, v)$  et  $\hat{g}(u, v)$  les TF des fonctions représentant les conditions au bord, on a alors

$$A \cos(0) + B \sin(0) = \hat{f}(u, v) \Rightarrow A = \hat{f}(u, v)$$

et

$$-Ap \sin(0) + Bp \cos(0) = \hat{g}(u, v) \Rightarrow B = \frac{1}{p} \hat{g}(u, v) = \frac{1}{c\sqrt{u^2 + v^2}} \hat{g}(u, v).$$

et appliquons la TF inverse :

$$z(x, y, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{z}(u, v, t) e^{-i(ux+vy)} dx dy,$$

soit

$$\begin{aligned} z(x, y, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(u, v) \cos\left(ct\sqrt{u^2 + v^2}\right) e^{-i(ux+vy)} dudv \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{g}(u, v) \frac{\sin\left(ct\sqrt{u^2 + v^2}\right)}{c\sqrt{u^2 + v^2}} e^{-i(ux+vy)} dudv \end{aligned}$$

Dans des cas particuliers on peut évaluer ces deux intégrales directement, mais nous allons donner la solution générale en fonction de  $f$  et  $g$  : le théorème de convolution, que l'on rappelle, dit que si deux fonctions  $p$  et  $q$  ont pour TF  $P$  et  $Q$  alors la TF inverse de  $PQ$  est  $p * q$  :

$$\begin{aligned} p * q(y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} p(x)q(y-x)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx \int_{-\infty}^{+\infty} Q(t)e^{-it(y-x)} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} Q(t)e^{-ity} dt \int_{-\infty}^{+\infty} p(x)e^{itx} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} Q(t)e^{-ity} dt (\sqrt{2\pi}P(t)) = \int_{-\infty}^{+\infty} Q(t)P(t)e^{-ity} dt. \end{aligned}$$

Il nous faut donc trouver les TF inverses de  $\cos\left(ct\sqrt{u^2 + v^2}\right)$  et de  $\frac{\sin\left(ct\sqrt{u^2 + v^2}\right)}{c\sqrt{u^2 + v^2}}$ . La manipulation des

termes en  $\sqrt{u^2 + v^2}$  invite évidemment à passer en coordonnées polaires : dans le plan  $(uOv)$  on a pour le point  $M(u, v)$  :  $\rho = \sqrt{u^2 + v^2}$ , pour le point  $m(x, y)$ ,  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  et  $\theta = (\overline{OM}, \overline{Om})$  ; d'où  $ux + vy = \overline{OM} \cdot \overline{Om} = \rho r \cos \theta$ . Il nous reste donc à calculer

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} \cos(c\rho t) e^{-i\rho r \cos \theta} \rho d\rho d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{+\infty} \rho \cos(c\rho t) e^{-i\rho r \cos \theta} d\rho$$

et

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\sin(c\rho t)}{c\rho} e^{-i\rho r \cos \theta} \rho d\rho d\theta = \frac{1}{2\pi c} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{+\infty} \sin(c\rho t) e^{-i\rho r \cos \theta} d\rho.$$

Mettons le cosinus sous forme exponentielle : en calculant la première intégrale on a

$$\int_0^{+\infty} \rho \cos(c\rho t) e^{-i\rho r \cos \theta} d\rho = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \rho e^{i\rho(ct-r \cos \theta)} d\rho + \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \rho e^{-i\rho(ct+r \cos \theta)} d\rho,$$

les calculs étant identiques nous ne faisons que la première en intégrant par parties :

$$\int_0^{+\infty} \rho e^{i\rho(ct-r \cos \theta)} d\rho = \frac{\rho e^{i\rho(ct-r \cos \theta)}}{i(ct-r \cos \theta)} \Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \frac{e^{i\rho(ct-r \cos \theta)}}{i(ct-r \cos \theta)} d\rho = \frac{\rho e^{i\rho(ct-r \cos \theta)}}{i(ct-r \cos \theta)} + \frac{e^{i\rho(ct-r \cos \theta)}}{(ct-r \cos \theta)^2} \Big|_0^{+\infty}.$$

On a alors

$$\int_0^{+\infty} \rho \cos(c\rho t) e^{-i\rho r \cos \theta} d\rho = \frac{1}{2} \left( \frac{\rho e^{i\rho(ct-r \cos \theta)}}{i(ct-r \cos \theta)} + \frac{e^{i\rho(ct-r \cos \theta)}}{(ct-r \cos \theta)^2} + \frac{\rho e^{-i\rho(ct+r \cos \theta)}}{i(ct+r \cos \theta)} + \frac{e^{-i\rho(ct+r \cos \theta)}}{(ct+r \cos \theta)^2} \right) \Big|_0^{+\infty}$$

Comme on le voit ici l'intégrale n'est pas convergente, aussi va-t-on utiliser un biais bien pratique en considérant la fonction  $\phi_\varepsilon(r, \theta, t) = \int_0^{+\infty} e^{-\varepsilon\rho} \rho \cos(c\rho t) e^{-i\rho r \cos \theta} d\rho$ . Le calcul précédent donne alors

$$\int_0^{+\infty} e^{-\varepsilon\rho} \rho \cos(c\rho t) e^{-i\rho r \cos\theta} d\rho = \frac{1}{2} \left( \frac{\rho e^{-\varepsilon\rho+i\rho(ct-r\cos\theta)}}{-\varepsilon+i(ct-r\cos\theta)} - \frac{e^{-\varepsilon\rho+i\rho(ct-r\cos\theta)}}{[-\varepsilon+i(ct-r\cos\theta)]^2} + \frac{\rho e^{-\varepsilon\rho-i\rho(ct+r\cos\theta)}}{-\varepsilon+i(ct+r\cos\theta)} - \frac{e^{-\varepsilon\rho-i\rho(ct+r\cos\theta)}}{[-\varepsilon+i(ct+r\cos\theta)]^2} \right) \Bigg|_0^{+\infty}$$

où nous passons d'abord à la limite lorsque  $\rho$  tend vers l'infini ; on a en fait deux termes de la forme

$$\frac{\rho e^{\rho\delta}}{\delta} - \frac{e^{\rho\delta}}{\delta^2} = \frac{(\rho\delta-1)e^{\rho\delta}}{\delta^2}, \text{ où } e^{\rho\delta} \text{ tend vers } 0 \text{ à l'infini et vaut } -\frac{1}{\delta^2} \text{ en } 0. \text{ On a donc finalement}$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-\varepsilon\rho} \rho \cos(c\rho t) e^{-i\rho r \cos\theta} d\rho = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{[-\varepsilon+i(ct-r\cos\theta)]^2} + \frac{1}{[-\varepsilon+i(ct+r\cos\theta)]^2} \right)$$

d'où en passant à la limite quand  $\varepsilon$  tend vers 0 :

$$\int_0^{+\infty} \rho \cos(c\rho t) e^{-i\rho r \cos\theta} d\rho = \frac{1}{2} \left( \frac{-1}{(ct-r\cos\theta)^2} + \frac{-1}{(ct+r\cos\theta)^2} \right).$$

Finalement on trouve

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{+\infty} \rho \cos(c\rho t) e^{-i\rho r \cos\theta} d\rho = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \left( \frac{-1}{(ct-r\cos\theta)^2} + \frac{-1}{(ct+r\cos\theta)^2} \right) d\theta.$$

Cette intégrale se calcule, chose que nous demandons à Maple :

> **u := x -> 1 / (c\*t - r\*cos(x))^2 + 1 / (c\*t + r\*cos(x))^2;**

$$u := x \rightarrow \frac{1}{(ct - r \cos(x))^2} + \frac{1}{(ct + r \cos(x))^2}$$

> **z := int(u(x), x=0..2\*Pi);**

$$z := 2tc\pi \left( \frac{\operatorname{csgn}(-\sqrt{c^2t^2 - r^2})ct + (\sqrt{c^2t^2 - r^2})r}{(\sqrt{c^2t^2 - r^2})ct + (\sqrt{c^2t^2 - r^2})r} - \frac{\operatorname{csgn}(\sqrt{c^2t^2 - r^2})ct + (\sqrt{c^2t^2 - r^2})r}{(\sqrt{c^2t^2 - r^2})(-c^2t^2 + r^2)} \right)$$

La fonction **csgn** renvoie +1 ou -1 suivant que l'argument est positif ou négatif ou dans le demi-plan complexe supérieur ou inférieur s'il est imaginaire pur. Ici on a à évaluer

$$c \operatorname{sgn}\left((r-ct)\sqrt{c^2t^2 - r^2}\right) - c \operatorname{sgn}\left((r+ct)\sqrt{c^2t^2 - r^2}\right),$$

lorsque  $r < ct$ ,  $r-ct < 0$  et  $r+ct > 0$  donc résultat -2,

lorsque  $r > ct$ ,  $\sqrt{c^2t^2 - r^2} = i\sqrt{r^2 - c^2t^2}$  et  $r-ct > 0$  d'où +1-1=0.

Ceci fait quand même beaucoup penser à la question du cône de lumière en relativité... Ci-dessous la représentation de  $z(r, t)$ ,  $c = 1$ ,  $t = 0.5$ ,  $r = 0..2$ .

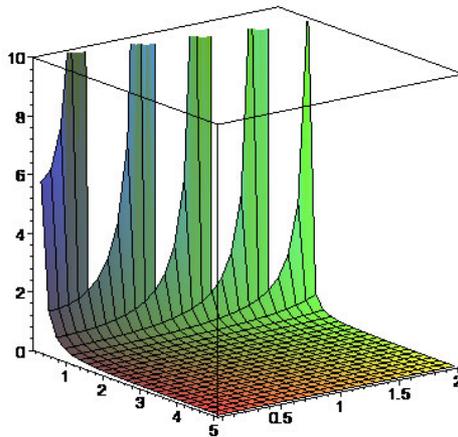


fig. 6 : Représentation de  $z(r, t)$ ,  $c = 1$ ,  $t = 0.5$ ,  $r = 0.2$ .

Restons donc avec  $r < ct$ , nous avons enfin

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{+\infty} \rho \cos(c\rho t) e^{-i\rho r \cos\theta} d\rho = \frac{ct}{(c^2t^2 - r^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{ct}{(c^2t^2 - x^2 - y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

qui est la TF inverse de  $\cos(ct\sqrt{u^2 + v^2})$ .

Il nous reste à faire la convolution :

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(u, v) \cos(ct\sqrt{u^2 + v^2}) e^{-i(ux+vy)} dudv = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(p, q) \frac{ct}{(c^2t^2 - (x-p)^2 - (y-q)^2)^{\frac{3}{2}}} dpdq ;$$

on peut modifier légèrement l'écriture en utilisant le fait que

$$\frac{ct}{(c^2t^2 - (x-p)^2 - (y-q)^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{\sqrt{c^2t^2 - (x-p)^2 - (y-q)^2}} \right).$$

Pour la TF inverse de  $\frac{\sin(ct\sqrt{u^2 + v^2})}{c\sqrt{u^2 + v^2}}$  on opère exactement de la même manière, les calculs étant même plus simples et on obtient

$$\frac{1}{2\pi c} \int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} \sin(c\rho t) e^{-i\rho r \cos\theta} d\rho d\theta = -\frac{1}{c(c^2t^2 - r^2)^{1/2}} = -\frac{1}{c\sqrt{c^2t^2 - x^2 - y^2}}$$

d'où l'expression générale de  $z$  :

$$z(x, y, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(p, q) \frac{ct}{(c^2t^2 - (x-p)^2 - (y-q)^2)^{\frac{3}{2}}} dpdq - \frac{1}{2\pi c} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(p, q) \frac{1}{(c^2t^2 - (x-p)^2 - (y-q)^2)^{1/2}} dpdq$$

ou encore

$$z(x, y, t) = -\frac{1}{2\pi c} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{f(\rho, q)}{\sqrt{c^2 t^2 - (x-\rho)^2 - (y-q)^2}} \right) d\rho dq - \frac{1}{2\pi c} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g(\rho, q)}{\sqrt{c^2 t^2 - (x-\rho)^2 - (y-q)^2}} d\rho dq.$$

Le calcul des deux intégrales correspondant aux TF inverses de  $\cos\left(ct\sqrt{u^2 + v^2}\right)$  et  $\frac{\sin\left(ct\sqrt{u^2 + v^2}\right)}{c\sqrt{u^2 + v^2}}$  peut en fait se ramener à celui d'intégrales de la forme

$$\int_0^\infty \rho J_0(r\rho) \cos(\rho ct) d\rho \quad \text{et} \quad \int_0^\infty \rho J_0(r\rho) \sin(\rho ct) d\rho,$$

mais le calcul est un peu plus long...

Le résultat précédent a été obtenu par Siméon-Denis Poisson vers 1830 au terme de calculs pénibles et difficiles.

### 2-c : Vibrations libres à symétrie de révolution

Un cas particulier du précédent est lorsqu'il y a une symétrie de révolution autour de l'axe (Oz) : dans ce cas  $z$  n'est plus fonction que de  $r$  et  $t$  ; l'équation 0 devient alors simplement

$$\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial z}{\partial r} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} - \frac{p(r, t)}{T}.$$

Reprenons  $p(r, t) = 0$  et utilisons cette fois la transformée de Hankel :  $\bar{z}(u, t) = \int_0^\infty rz(r, t) J_0(ur) dr$  ; les propriétés vues au chapitre Fonctions de Bessel donnent

$$\int_0^\infty r \left( \frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial z}{\partial r} \right) J_0(ur) dr = -u^2 \bar{z}(u, t)$$

sous réserve que  $r \frac{\partial z}{\partial r}$  tend vers 0 lorsque  $r$  tend vers 0 et lorsque  $r$  tend vers l'infini. 0 devient alors

$$-u^2 \bar{z}(u, t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \bar{z}}{\partial t^2} \Leftrightarrow \frac{d^2 \bar{z}}{dt^2} + c^2 u^2 \bar{z} = 0$$

d'où  $\bar{z}(u, t) = A(u) \cos(ctu) + B(u) \sin(ctu) = \bar{f}(u) \cos(ctu) + \frac{1}{cu} \bar{g}(u) \sin(ctu)$  en prenant les conditions initiales

$$z(r, 0) = f(r) \Leftrightarrow \bar{z}(u, 0) = \bar{f}(u) \quad \text{et} \quad \frac{\partial z}{\partial t}(r, 0) = g(r) \Leftrightarrow \frac{\partial \bar{z}}{\partial t}(u, 0) = \bar{g}(u).$$

L'inversion de la transformée de Hankel donne alors

$$z(r, t) = \int_0^\infty u \bar{f}(u) \cos(ctu) J_0(ur) du + \frac{1}{c} \int_0^\infty \bar{g}(u) \sin(ctu) J_0(ur) du.$$

Les relations entre transformée de Fourier et transformée de Hankel montrent la marche à suivre maintenant (voir Fonctions de Bessel, § 4.c) : on repasse en coordonnées cartésiennes en posant  $f(\rho) = f(\rho, q)$  et  $g(\rho) = g(\rho, q)$  avec  $\rho = \rho \cos \phi$  et  $q = \rho \sin \phi$ , ce qui nous donne

$$z(r, t) = -\frac{1}{2\pi c} \int_0^\infty \rho d\rho \int_0^{2\pi} \left[ f(\rho) \frac{\partial}{\partial t} + g(\rho) \right] \left[ \frac{1}{\sqrt{c^2 t^2 - r^2 - \rho^2 + 2r\rho \cos \phi}} \right] d\phi$$

(l'opérateur entre crochets s'applique à la fonction  $1/\dots$ ). Or on peut calculer l'intégrale suivante :

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{c^2 t^2 - r^2 - \rho^2 + 2r\rho \cos \phi}} d\phi = \frac{1}{\sqrt{c^2 t^2 - r^2 - \rho^2}} \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - \frac{4r\rho}{c^2 t^2 - (r-\rho)^2} \sin^2 \frac{1}{2}\phi}} = \frac{4F\left(k, \frac{\pi}{2}\right)}{\sqrt{c^2 t^2 - r^2 - \rho^2}}$$

où  $F$  est l'intégrale elliptique de première espèce :  $F\left(k, \frac{\pi}{2}\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi}}$  avec ici  $k^2 = \frac{4r\rho}{c^2 t^2 - (r-\rho)^2}$ .

Notre solution est donc

$$z(r, t) = -\frac{1}{2\pi c} \int_0^\infty \rho \left[ f(\rho) \frac{\partial}{\partial t} + g(\rho) \right] \left( \frac{F(k, \pi/2)}{\sqrt{c^2 t^2 - r^2 - \rho^2}} \right) d\rho.$$

Evidemment, arrivé à ce stade on se dit que les choses se sont un peu compliquées et dans la pratique on utilisera suivant les cas les solutions à base de fonctions de Bessel, et dans ce cas on aura tout intérêt à utiliser la transformée de Laplace et son catalogue d'images, ou celles utilisant l'intégrale elliptique. En tout cas ce dernier résultat montre la profondeur des questions posées...

### 2-d : Vibrations forcées

Si nous reprenons l'équation (2.a.1) où  $p(x, y, t)$  n'est pas nul, la démarche est tout à fait similaire ; en passant à la double transformée de Fourier on a alors avec

$$\hat{p}(u, v, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, y, t) e^{i(ux+vy)} dx dy$$

l'équation transformée :  $\frac{d^2 \hat{z}}{dt^2} + c^2(u^2 + v^2)\hat{z} = \frac{\hat{p}}{T}$ . La méthode est alors la même que dans les cas des poutres (voir **Vibrations des poutres**) et on obtient quand la membrane est en équilibre à  $t = 0$ , soit lorsque  $\hat{z}(u, v, 0) = \frac{d\hat{z}}{dt}(u, v, 0) = 0$  :

$$\hat{z}(u, v, t) = -\frac{1}{T(u^2 + v^2)} \int_0^t \hat{p}(u, v, \tau) \sin\left(c\sqrt{u^2 + v^2}(\tau - t)\right) d\tau,$$

et

$$z(x, y, t) = -\frac{1}{T} \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{p}(u, v, \tau) \sin\left(c\sqrt{u^2 + v^2}(\tau - t)\right) e^{-i(ux+vy)} du dv$$

ou encore

$$z(x, y, t) = \frac{1}{cT} \int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} d\beta \int_0^t \frac{p(\alpha, \beta, \tau)}{\sqrt{c^2(\tau-t)^2 - (x-\alpha)^2 - (y-\beta)^2}} d\tau.$$

### 2-e : Vibrations d'une membrane circulaire

Dernière situation que nous abordons. Dans ce que nous avons vu nous avons utilisé les transformées de Fourier ou de Hankel grâce aux grandes dimensions des objets considérés. Si on considère des objets de dimensions restreintes, on est obligé de passer par les séries de Fourier ou de Fourier-Bessel. Le problème est symétrique par rapport à l'origine, aussi on travaille avec  $z(r, t)$ .

On utilise la transformée de Hankel finie (THF) :  $\bar{z}(b_i, t) = \int_0^a rz(r, t) J_0(b_i r) dr$  où  $b_i$  est le  $i$ -ième zéro positif de  $J_0(ax)$ .

L'équation du mouvement sous la condition  $z(a, 0) = 0$  est

$$\frac{d^2 z(r, t)}{dt^2} = c^2 z(r, t) + \frac{1}{\sigma} p(r, t)$$

où  $\sigma$  est la densité surfacique de la membrane, soit en passant à la THF

$$\frac{d^2 \bar{z}(b_i, t)}{dt^2} + c^2 b_i^2 \bar{z}(b_i, t) = \frac{1}{\sigma} \bar{p}(b_i, t).$$

Prenons tout d'abord  $p(r, t) = 0$  ; les conditions au bord sont  $z(r, 0) = f(r)$  et  $\frac{\partial z}{\partial t}(r, 0) = g(r)$ , soit

$$\bar{z}(b_i, 0) = \int_0^a r f(r) J_0(b_i r) dr \quad \text{et} \quad \frac{\partial \bar{z}}{\partial t}(b_i, 0) = \int_0^a r g(r) J_0(b_i r) dr,$$

ce qui nous donne

$$\bar{z}(b_i, t) = \cos(cb_i t) \int_0^a r f(r) J_0(b_i r) dr + \frac{\sin(cb_i t)}{cb_i} \int_0^a r g(r) J_0(b_i r) dr.$$

Il reste à utiliser la THF inverse :

$$z(r, t) = \frac{2}{a^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_0(b_i r)}{[J_1(b_i a)]^2} \cos(cb_i t) \int_0^a u f(u) J_0(b_i u) du + \frac{2}{ca^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_0(b_i r)}{[J_1(b_i a)]^2} \frac{\sin(cb_i t)}{b_i} \int_0^a u g(u) J_0(b_i u) du$$

où les sommes sont prises sur toutes les racines positives de  $J_0(ax) = 0$ .

Dans le cas où  $p$  n'est pas nul les complications vont apparaître évidemment. A titre d'exemple appliquons une force d'amplitude  $p_0$  variable dans le temps en tout point d'un cercle de centre  $O$ , de rayon  $q$ , soit  $p(q, t) = p_0 \phi(t)$  et  $p$  nulle partout ailleurs.

On sait que  $\int_0^q r J_0(b_i r) dr = \frac{q}{b_i} J_1(b_i q)$  d'où  $\bar{p}(b_i, t) = \frac{p_0 q}{b_i} J_1(b_i q) \phi(t)$ . On met la membrane en mouvement à  $t = 0$ , de sorte que  $\frac{\partial z}{\partial t}(r, 0) = 0 \Rightarrow \frac{\partial \bar{z}}{\partial t}(b_i, 0) = 0$ . La solution en  $\bar{z}$  est alors

$$\bar{z}(b_i, t) = \frac{p_0 q}{\sigma b_i} J_1(b_i q) \int_0^t \phi(\tau) \sin(cb_i(t-\tau)) d\tau$$

et la solution  $z$  est :

$$z(r, t) = \frac{2p_0 q}{c\sigma a^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_1(b_i q)}{b_i^2} \frac{J_0(b_i r)}{[J_1(b_i a)]^2} \int_0^t \phi(u) \sin(cb_i(t-u)) du.$$

Deux cas particuliers sont intéressants :

Lorsque  $q = a$  on a  $z(r, t) = \frac{2p_0}{c\sigma a} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_0(b_i r)}{b_i^2 J_1(b_i a)} \int_0^t \phi(u) \sin(cb_i(t-u)) du$  ou encore en posant  $b_i a = \lambda_i$  :

$$z(r, t) = \frac{2p_0 a}{c\sigma} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_0\left(\lambda_i \frac{r}{a}\right)}{\lambda_i^2 J_1(\lambda_i)} \int_0^t \phi(u) \sin\left(\frac{c\lambda_i(t-u)}{a}\right) du.$$

Lorsque  $q = 0$ , pour éviter que  $z$  devienne nulle, il faut rendre  $p_0$  infini, de sorte que  $\pi p_0 q^2$  tende vers une valeur finie  $F$  lorsque  $q$  tend vers 0 (la pression sera uniforme sur un petit cercle autour de l'origine) ; en posant également  $b_i a = \lambda_i$  on a alors

$$z(r, t) = \frac{Fa}{\pi c\sigma} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_0\left(\lambda_i \frac{r}{a}\right)}{\lambda_i^2 [J_1(\lambda_i)]^2} \int_0^t \phi(u) \sin\left(\frac{c\lambda_i(t-u)}{a}\right) du.$$



### 3. Les équations de Maxwell

Si on exprime les champs électrique  $\mathbf{E}$  et magnétique  $\mathbf{B}$  grâce aux équations de Maxwell dans un milieu isotrope de constante diélectrique  $\varepsilon$  et de permittivité  $\mu$  on a :

$$\begin{cases} \operatorname{rot}\mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \operatorname{rot}\mathbf{B} = \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \\ \operatorname{div}\mathbf{E} = 0 \\ \operatorname{div}\mathbf{B} = 0 \end{cases}$$

prenons un système de coordonnées orthogonales  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  dont l'élément de longueur  $ds$  est

$$ds^2 = \sum_{i=1}^3 e_i^2 dx_i^2 \text{ et exprimons nos équations :}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x_2}(e_3 E_3) - \frac{\partial}{\partial x_3}(e_2 E_2) = -\mu e_2 e_3 \frac{\partial B_1}{\partial t} & (1.a) \\ \frac{\partial}{\partial x_3}(e_1 E_1) - \frac{\partial}{\partial x_1}(e_3 E_3) = -\mu e_3 e_1 \frac{\partial B_2}{\partial t} & (1.b) , \\ \frac{\partial}{\partial x_1}(e_2 E_2) - \frac{\partial}{\partial x_2}(e_1 E_1) = -\mu e_1 e_2 \frac{\partial B_3}{\partial t} & (1.c) \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x_2}(e_3 B_3) - \frac{\partial}{\partial x_3}(e_2 B_2) = \varepsilon e_2 e_3 \frac{\partial E_1}{\partial t} & (2.a) \\ \frac{\partial}{\partial x_3}(e_1 B_1) - \frac{\partial}{\partial x_1}(e_3 B_3) = \varepsilon e_3 e_1 \frac{\partial E_2}{\partial t} & (2.b) , \\ \frac{\partial}{\partial x_1}(e_2 B_2) - \frac{\partial}{\partial x_2}(e_1 B_1) = \varepsilon e_1 e_2 \frac{\partial E_3}{\partial t} & (2.c) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x_1}(e_2 e_3 E_1) + \frac{\partial}{\partial x_2}(e_1 e_3 E_2) + \frac{\partial}{\partial x_3}(e_1 e_2 E_3) = 0 & (3.a) \\ \frac{\partial}{\partial x_1}(e_2 e_3 B_1) + \frac{\partial}{\partial x_2}(e_1 e_3 B_2) + \frac{\partial}{\partial x_3}(e_1 e_2 B_3) = 0 & (3.b). \end{cases}$$

La solution générale de ce système d'équations s'obtient en considérant deux fonctions  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{B}$  situées dans des plans différents, c'est-à-dire en annulant une composante de  $\mathbf{E}$ , par exemple en prenant  $E_1 = 0$  ainsi qu'une composante de  $\mathbf{B}$ , par exemple  $B_1 = 0$ . Cette méthode ne donne pas les solutions générales dans tous les systèmes de coordonnées mais dans ceux pour lesquels  $e_1$  ne dépend que de la coordonnée  $x_1$  et  $\frac{e_2}{e_3}$  ne dépend pas de  $x_1$ ; dans ces conditions on peut prendre  $e_1 = 1$  sans perte de généralité. On a alors deux types de solution :

#### 3-a : $B_1 = 0$ : onde transverse magnétique ou onde électrique

$$\text{soit } \frac{\partial}{\partial x_2}(e_3 E_3) = \frac{\partial}{\partial x_3}(e_2 E_2), \text{ ce qui peut aussi s'écrire } \begin{cases} e_2 E_2 = \frac{\partial P}{\partial x_2} \\ e_3 E_3 = \frac{\partial P}{\partial x_3} \end{cases} \text{ où } P \text{ est une fonction arbitraire.}$$

En remplaçant dans (2. b) et (2. c) on a alors : 
$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon \frac{e_3 e_1}{e_2} \frac{\partial^2 P}{\partial x_2 \partial t} = -\frac{\partial}{\partial x_1} (e_3 B_3) \\ \varepsilon \frac{e_1 e_2}{e_3} \frac{\partial^2 P}{\partial x_3 \partial t} = \frac{\partial}{\partial x_1} (e_2 B_2) \end{array} \right. , \text{ soit avec les informations}$$

disponibles sur  $e_1, e_2$  et  $e_3$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon \frac{\partial^2 P}{\partial x_2 \partial t} = -\frac{e_2}{e_3} \frac{\partial}{\partial x_1} (e_3 B_3) = -\frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{e_2}{e_3} e_3 B_3 \right) = -\frac{\partial}{\partial x_1} (e_2 B_3) \\ \varepsilon \frac{\partial^2 P}{\partial x_3 \partial t} = \frac{e_3}{e_2} \frac{\partial}{\partial x_1} (e_2 B_2) = \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{e_3}{e_2} e_2 B_2 \right) = \frac{\partial}{\partial x_1} (e_3 B_2) \end{array} \right. .$$

Si on pose  $P = \frac{\partial U}{\partial x_1}$  ces formules deviennent

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon \frac{\partial^2 U}{\partial x_2 \partial t} = -e_2 B_3 \\ \varepsilon \frac{\partial^2 U}{\partial x_3 \partial t} = e_3 B_2 \end{array} \right. .$$

On obtient des diverses équations les expressions de  $E_2, E_3, B_2$  et  $B_3$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} E_2 = \frac{1}{e_2} \frac{\partial^2 U}{\partial x_2 \partial x_1}, B_2 = \frac{\varepsilon}{e_3} \frac{\partial^2 U}{\partial x_3 \partial t} \\ E_3 = \frac{1}{e_3} \frac{\partial^2 U}{\partial x_3 \partial x_1}, B_3 = -\frac{\varepsilon}{e_2} \frac{\partial^2 U}{\partial x_2 \partial t} \end{array} \right. .$$

En reportant ces expressions dans (1. b) ou (1. c) on obtient

$$E_1 = \frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} ,$$

en les reportant dans (2.a) on a

$$E_1 = -\frac{1}{e_2 e_3} \left[ \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{e_3}{e_2} \frac{\partial U}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_3} \left( \frac{e_2}{e_3} \frac{\partial U}{\partial x_3} \right) \right] ,$$

d'où l'équation suivante pour la fonction  $U$  :

$$\mu \varepsilon \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} + \frac{1}{e_2 e_3} \left[ \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{e_3}{e_2} \frac{\partial U}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_3} \left( \frac{e_2}{e_3} \frac{\partial U}{\partial x_3} \right) \right] .$$

### 3-b : $E_1 = 0$ : onde transverse électrique ou onde magnétique

Avec l'hypothèse  $E_1 = 0$ , les calculs précédents redonnent exactement la même équation pour la fonction  $U$ . Les composantes du champ électromagnétique sont alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} E_1 = 0, B_1 = \frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \\ E_2 = -\frac{\mu}{e_3} \frac{\partial^2 U}{\partial x_3 \partial t}, B_2 = \frac{1}{e_2} \frac{\partial^2 U}{\partial x_1 \partial x_2} \\ E_3 = \frac{\mu}{e_2} \frac{\partial^2 U}{\partial x_2 \partial t}, B_3 = \frac{1}{e_3} \frac{\partial^2 U}{\partial x_1 \partial x_3} \end{array} \right. .$$

### 3-c : Cas où le champ est une fonction sinusoidale du temps

Cette situation est la plus fréquente ; on pose alors  $U(x, y, z, t) = e^{i\omega t}U(x, y, z)$ . Si  $v$  est la vitesse de l'onde dans le milieu on a :  $v^2 \mu \epsilon = 1$ ,  $k = \frac{\omega}{v} = \omega \sqrt{\mu \epsilon} = \frac{2\pi}{\lambda}$ , la nouvelle fonction  $U$  est alors donnée par

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} + \frac{1}{e_2 e_3} \left[ \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{e_3}{e_2} \frac{\partial U}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_3} \left( \frac{e_2}{e_3} \frac{\partial U}{\partial x_3} \right) \right] + k^2 U = 0.$$

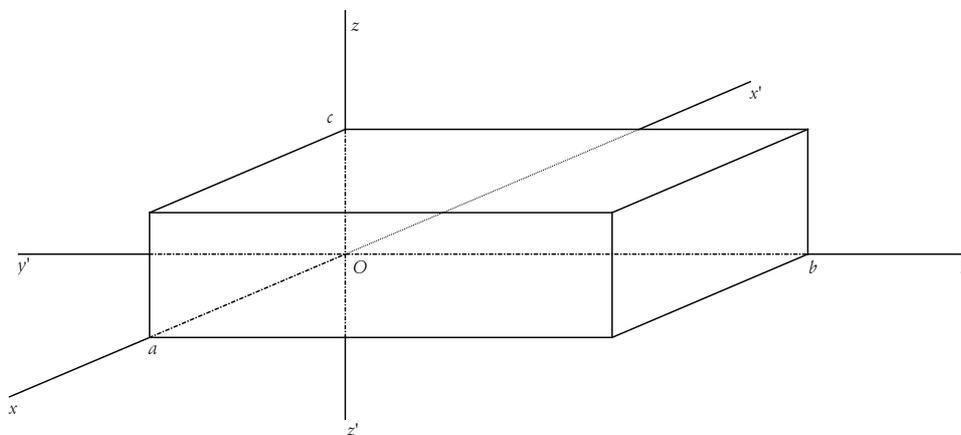
L'expression du champ devient (en sous-entendant le facteur  $e^{i\omega t}$ )  
pour l'onde électrique :

$$\begin{cases} E_1 = \frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} + k^2 U, E_2 = \frac{1}{e_2} \frac{\partial^2 U}{\partial x_2 \partial x_1}, E_3 = \frac{1}{e_3} \frac{\partial^2 U}{\partial x_3 \partial x_1} \\ B_1 = 0, B_2 = i \frac{k}{e_3} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \frac{\partial^2 U}{\partial x_3}, B_3 = -i \frac{k}{e_2} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \frac{\partial^2 U}{\partial x_2} \end{cases}$$

pour l'onde magnétique :

$$\begin{cases} E_1 = 0, E_2 = -i \frac{k}{e_3} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{\partial^2 U}{\partial x_3}, E_3 = i \frac{k}{e_2} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{\partial^2 U}{\partial x_2} \\ B_1 = \frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} + k^2 U, B_2 = \frac{1}{e_2} \frac{\partial^2 U}{\partial x_2 \partial x_1}, B_3 = \frac{1}{e_3} \frac{\partial^2 U}{\partial x_3 \partial x_1} \end{cases}$$

### 3-d : Oscillations électromagnétiques dans une cavité en forme de parallélépipède



On utilise évidemment les coordonnées rectangulaires d'où  $e_1 = e_2 = e_3 = 1$  ; la fonction  $U$  est simplement solution de  $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + k^2 U = 0$ . Posons alors  $U$  sous forme de produit de Laplace  $U(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z)$ , remplaçons dans l'équation et divisons tout par  $XYZ$  :

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} + \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} + k^2 = 0.$$

Comme chacun des termes ne dépend que d'une seule variable, le seul moyen de satisfaire cette équation consiste à poser

$$\frac{d^2 X}{dx^2} + \alpha^2 X = 0, \frac{d^2 Y}{dy^2} + \beta^2 Y = 0 \text{ et } \frac{d^2 Z}{dz^2} + \gamma^2 Z = 0$$

avec  $\alpha, \beta, \gamma$  complexes et  $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = k^2$ . Ce système se résout facilement, la solution est alors

$$U(x, y, z, t) = e^{i\omega t} \operatorname{Re}(Ae^{-i\alpha x}) \operatorname{Re}(Be^{-i\beta y}) \operatorname{Re}(Ce^{-i\gamma z})$$

où  $A, B$  et  $C$  sont des constantes complexes. Les constantes  $\alpha, \beta, \gamma$  ainsi que  $A, B, C$  dépendent uniquement des conditions aux limites.

En l'occurrence les champs électriques tangentiels doivent s'annuler sur les parois :

$$E_y(x=0) = E_y(x=a) = E_z(x=0) = E_z(x=a) = 0,$$

$$E_z(y=0) = E_z(y=b) = E_x(y=0) = E_x(y=b) = 0$$

$$E_x(z=0) = E_x(z=c) = E_y(z=0) = E_y(z=c) = 0,$$

ce qui donne après quelques calculs

$$U(x, y, z, t) = e^{i\omega t} \cos \alpha x \sin \beta y \sin \gamma z$$

pour la solution transverse magnétique (onde électrique) et

$$U(x, y, z, t) = e^{i\omega t} \sin \alpha x \cos \beta y \cos \gamma z$$

pour la solution transverse électrique (onde magnétique), avec les valeurs  $\alpha = \frac{n\pi}{a}, \beta = \frac{m\pi}{b}, \gamma = \frac{p\pi}{c}$ ,  $n, m, p$  entiers. Une fois que  $U$  est connue, il est facile d'obtenir les différentes composantes du champ.

La condition  $\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} + \frac{p^2}{c^2} = \frac{k^2}{\pi^2}$  donne la longueur d'onde  $\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2}{\sqrt{\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} + \frac{p^2}{c^2}}}$ .

Dans la solution transverse magnétique les triplets

$$(m, n, p) = (0, 0, 0), (0, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 0, 0), (1, 0, 1), (1, 1, 0),$$

ne donnent pas de solutions ; l'oscillation donnant la plus grande longueur d'onde sera associée à  $(0, 1, 1)$ ,

ce qui donne  $\lambda_{\max} = \frac{2}{\sqrt{\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}}}$ .

Dans la solution transverse électrique les premiers triplets solution sont  $(1, 1, 0)$  et  $(1, 0, 1)$ .

Notez que dans l'analyse initiale du problème on a donné un rôle particulier à  $e_1$  et donc à la direction  $(Ox)$  ; les solutions générales doivent être valables dans toutes les directions de l'espace et on doit ajouter toutes celles obtenues par permutation circulaire de  $x, y$  et  $z$ .

Autre remarque : lorsqu'on pose  $U(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z)$ , en fait il faut rajouter un facteur constant :  $U(x, y, z) = KX(x)Y(y)Z(z)$  où  $K$  dépendra des conditions aux limites et donc des nombres  $\alpha, \beta, \gamma$ . Pour chaque mode de vibration on aura un  $K$  différent... dépendant d'autres conditions initiales.

### 3-e : Oscillations électromagnétiques dans une cavité en forme de cylindre de révolution

On suppose que le matériau constituant les parois du cylindre est infiniment conducteur et que la cavité est fermée par deux sections droites distantes de  $L$ . Comme d'habitude on s'intéresse aux fonctions sinusoidales du temps et nous prenons un système de coordonnées cylindriques avec  $x_1 = z, x_2 = \rho$  et  $x_3 = \varphi$ . Les conditions du début sont remplies :  $e_1 = 1, e_2 = 1, e_3 = \rho$  ; l'équation

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} + \frac{1}{e_2 e_3} \left[ \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{e_3}{e_2} \frac{\partial U}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_3} \left( \frac{e_2}{e_3} \frac{\partial U}{\partial x_3} \right) \right] + k^2 U = 0$$

devient alors

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + \frac{1}{\rho} \left[ \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial U}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial U}{\partial \varphi} \right) \right] + k^2 U = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial U}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} + k^2 U = 0,$$

équation rencontrée dans le chapitre **Fonctions de Bessel**.

Le produit de Laplace correspondant est alors

$$U = e^{i\omega t} \operatorname{Re} \left( A e^{-i\nu\varphi} \right) \operatorname{Re} \left( B e^{-iqz} \right) \operatorname{Re} \left( CZ_\nu(a\rho) \right) \text{ avec } a^2 = k^2 - q^2, \nu = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}.$$

Si le rayon vecteur peut tourner librement d'un nombre entier de tours, le champ reprendra les mêmes valeurs périodiquement et  $\nu = n$ , entier, soit

$$U = e^{i\omega t} \operatorname{Re} \left( A e^{-in\varphi} \right) \operatorname{Re} \left( B e^{-iqz} \right) \operatorname{Re} \left( CZ_n(a\rho) \right), n = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}.$$

Si la cavité cylindrique est vide, le champ doit avoir des valeurs finies pour  $\rho = 0$ , ce qui conduit à éliminer la partie de  $Z_n$  en  $Y_n$  : la solution est alors simplement

$$U = K e^{i\omega t} J_n(a\rho) \operatorname{Re} \left( A e^{-in\varphi} \right) \operatorname{Re} \left( B e^{-iqz} \right).$$

Les composantes du champ s'écrivent alors

- pour l'onde transverse magnétique (onde électrique **E**) :

$$\left\{ \begin{array}{l} E_z = a^2 J_n(a\rho) \operatorname{Re}(A e^{-in\varphi}) \operatorname{Re}(B e^{-iqz}) e^{i\omega t} \\ E_\rho = qa J'_n(a\rho) \operatorname{Re}(A e^{-in\varphi}) \operatorname{Re}(-B i e^{-iqz}) e^{i\omega t} \\ E_\varphi = \frac{nq}{\rho} J_n(a\rho) \operatorname{Re}(-A i e^{-in\varphi}) \operatorname{Re}(-B i e^{-iqz}) e^{i\omega t} \end{array} \right. , \left\{ \begin{array}{l} B_z = 0 \\ B_\rho = i \frac{nk}{\rho} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} J_n(a\rho) \operatorname{Re}(-A i e^{-in\varphi}) \operatorname{Re}(B e^{-iqz}) e^{i\omega t} \\ B_\varphi = -iak \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} J'_n(a\rho) \operatorname{Re}(A e^{-in\varphi}) \operatorname{Re}(B e^{-iqz}) e^{i\omega t} \end{array} \right.$$

- pour l'onde transverse électrique (onde magnétique **B**) :

$$\left\{ \begin{array}{l} E_z = 0 \\ E_\rho = i \frac{nk}{\rho} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} J_n(a\rho) \operatorname{Re}(-A i e^{in\varphi}) \operatorname{Re}(B e^{iqz}) e^{i\omega t} \\ E_\varphi = iak \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} J'_n(a\rho) \operatorname{Re}(A e^{in\varphi}) \operatorname{Re}(B e^{-iqz}) e^{i\omega t} \end{array} \right. , \left\{ \begin{array}{l} B_z = a^2 J_n(a\rho) \operatorname{Re}(A e^{-in\varphi}) \operatorname{Re}(B e^{-iqz}) e^{i\omega t} \\ B_\rho = qa J'_n(a\rho) \operatorname{Re}(A e^{-in\varphi}) \operatorname{Re}(-B i e^{-iqz}) e^{i\omega t} \\ B_\varphi = \frac{nq}{\rho} J_n(a\rho) \operatorname{Re}(-A i e^{-in\varphi}) \operatorname{Re}(-B i e^{-iqz}) e^{i\omega t} \end{array} \right.$$

Si on note  $R$  le rayon du cylindre, l'annulation des champs électriques tangentiels sur les parois donne les conditions aux limites :

$$E_\rho(z=0) = E_\rho(z=L) = E_\varphi(z=0) = E_\varphi(z=L) = 0, E_z(\rho=R) = E_\varphi(\rho=R) = 0 ;$$

pour **E** on doit alors avoir  $J_n(aR) = 0$ ,  $q = \frac{m\pi}{L}$ ,  $m$  entier, et le produit de Laplace :

$$U = J_n(a\rho) \operatorname{Re}(A e^{-in\varphi}) \sin(qz) e^{i\omega t},$$

pour **B** on doit alors avoir  $J'_n(aR) = 0$ ,  $q = \frac{m\pi}{L}$ ,  $m$  entier, et le produit de Laplace :

$$U = J_n(a\rho) \operatorname{Re}(A e^{-in\varphi}) \sin(qz) e^{i\omega t}.$$

Appelons  $\lambda_p$  la  $p^{\text{ième}}$  racine non nulle de  $J_n(x) = 0$  et  $\xi_p$  la  $p^{\text{ième}}$  racine non nulle de  $J'_n(x) = 0$  ; on a alors

- pour l'onde transverse magnétique (onde électrique **E**) :

$$\left\{ \begin{array}{l} E_z = \frac{\lambda_p^2}{R^2} J_n \left( \frac{\lambda_p}{R} \rho \right) \operatorname{Re}(Ae^{-in\varphi}) \cos \left( \frac{m\pi z}{L} \right) e^{i\alpha t} \\ E_\rho = -\frac{m\pi\lambda_p}{LR} J_n' \left( \frac{\lambda_p}{R} \rho \right) \operatorname{Re}(Ae^{-in\varphi}) \sin \left( \frac{m\pi z}{L} \right) e^{i\alpha t} \\ E_\varphi = \frac{nm\pi}{L\rho} J_n \left( \frac{\lambda_p}{R} \rho \right) \operatorname{Re}(Aie^{-in\varphi}) \sin \left( \frac{m\pi z}{L} \right) e^{i\alpha t} \end{array} \right. , \left\{ \begin{array}{l} B_z = 0 \\ B_\rho = \frac{nk}{\rho} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} J_n \left( \frac{\lambda_p}{R} \rho \right) \operatorname{Re}(Ae^{-in\varphi}) \cos \left( \frac{m\pi z}{L} \right) e^{i\alpha t} \\ B_\varphi = -i \frac{\lambda_p k}{R} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} J_n' \left( \frac{\lambda_p}{R} \rho \right) \operatorname{Re}(Ae^{-in\varphi}) \cos \left( \frac{m\pi z}{L} \right) e^{i\alpha t} \end{array} \right.$$

Dans le vide, la fréquence de cette oscillation est égale à

$$\frac{kc}{2\pi} = \frac{1}{2} c \sqrt{\frac{\lambda_p^2}{\pi^2 R^2} + \frac{m^2}{L^2}},$$

la plus basse fréquence est alors obtenue pour  $m = 0$  et  $n = 0$ , la première racine non nulle de  $J_0(x) = 0$  étant 2,40482. On a alors une fréquence de  $\frac{2,40482 \times 3 \times 10^{10}}{2\pi R} = \frac{72145}{2\pi R}$  Mhz avec  $R$  en cm.

- pour l'onde transverse électrique (onde magnétique **B**) :

$$\left\{ \begin{array}{l} E_z = 0 \\ E_\rho = -\frac{nk}{\rho} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} J_n \left( \frac{\xi_p}{R} \rho \right) \operatorname{Re}(Ae^{-in\varphi}) \sin \left( \frac{m\pi z}{L} \right) e^{i\alpha t} \\ E_\varphi = i \frac{\xi_p k}{R} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} J_n' \left( \frac{\xi_p}{R} \rho \right) \operatorname{Re}(Ae^{-in\varphi}) \sin \left( \frac{m\pi z}{L} \right) e^{i\alpha t} \end{array} \right. , \left\{ \begin{array}{l} B_z = \frac{\xi_p^2}{R^2} J_n \left( \frac{\xi_p}{R} \rho \right) \operatorname{Re}(Ae^{-in\varphi}) \sin \left( \frac{m\pi z}{L} \right) e^{i\alpha t} \\ B_\rho = \frac{m\pi\xi_p}{LR} J_n' \left( \frac{\xi_p}{R} \rho \right) \operatorname{Re}(Ae^{-in\varphi}) \cos \left( \frac{m\pi z}{L} \right) e^{i\alpha t} \\ B_\varphi = -\frac{nm\pi}{L\rho} J_n \left( \frac{\xi_p}{R} \rho \right) \operatorname{Re}(Aie^{-in\varphi}) \cos \left( \frac{m\pi z}{L} \right) e^{i\alpha t} \end{array} \right. .$$

Dans le vide, la fréquence de cette oscillation est égale à

$$\frac{kc}{2\pi} = \frac{1}{2} c \sqrt{\frac{\xi_p^2}{\pi^2 R^2} + \frac{m^2}{L^2}},$$

le champ **B** s'annulant complètement pour  $m = 0$ , il faut donc prendre au moins  $m = 1$  ;

pour  $n = 0$  la première racine non nulle de  $J_0'(x) = 0$  est 3,8317 et la fréquence obtenue est environ  $\frac{3 \times 10^{10} \times 3,8317}{2\pi R} = \frac{114\,951}{2\pi R}$  Mhz ;

pour  $n = 1$ , la première racine non nulle de  $J_1'(x) = 0$  est 1,8412, la fréquence obtenue est environ  $\frac{3 \times 10^{10} \times 1,8412}{2\pi R} = \frac{55\,236}{2\pi R}$  Mhz .

Les différentes oscillations sont déterminées par les triplets  $(n, m, p)$  :  $m$  détermine la périodicité le long d'une direction parallèle à  $(Oz)$ ,  $n$  détermine la période de répétition lorsque le rayon vecteur tourne autour de  $(Oz)$ ,  $p$  détermine le nombre de cercles nodaux sur lesquels certaines composantes du champ s'annulent. La fréquence la plus basse des ondes **E** correspond donc au triplet  $(0, 0, 1)$ , des ondes **B** à  $(1, 1, 1)$ .

### 3-f : Oscillations électromagnétiques dans une cavité en forme de cylindre de révolution de longueur infinie

Le calcul est identique à celui du paragraphe précédent et on a  $U = Ke^{i\alpha t} J_n(a\rho) \operatorname{Re}(Ae^{in\varphi}) \operatorname{Re}(Be^{iqz})$  où les conditions aux limites se réduisent à  $E_z = E_\varphi = 0$  pour  $\rho = R$ .

Le paramètre  $a$  est donné par  $J_n(a\rho) = 0$  pour l'onde transverse magnétique et par  $J_n'(a\rho) = 0$  pour l'onde transverse électrique, ce qui donne :

- pour l'onde transverse magnétique (onde électrique **E**) :

$$\left\{ \begin{array}{l} E_z = \frac{\lambda_p^2}{R^2} J_n \left( \frac{\lambda_p}{R} \rho \right) \operatorname{Re}(-iAe^{in\varphi}) e^{-iqz} e^{i\alpha x} \\ E_\rho = -\frac{m\pi\lambda_p}{LR} J_n' \left( \frac{\lambda_p}{R} \rho \right) \operatorname{Re}(Ae^{in\varphi}) e^{-iqz} e^{i\alpha x} \\ E_\varphi = -i \frac{nq}{\rho} J_n \left( \frac{\lambda_p}{R} \rho \right) \operatorname{Re}(Ae^{in\varphi}) e^{-iqz} e^{i\alpha x} \end{array} \right. , \left\{ \begin{array}{l} B_z = 0 \\ B_\rho = i \frac{nk}{\rho} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} J_n \left( \frac{\lambda_p}{R} \rho \right) \operatorname{Re}(Ae^{in\varphi}) e^{-iqz} e^{i\alpha x} \\ B_\varphi = -i \frac{\lambda_p k}{R} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} J_n' \left( \frac{\lambda_p}{R} \rho \right) \operatorname{Re}(Ae^{in\varphi}) e^{-iqz} e^{i\alpha x} \end{array} \right. ;$$

- pour l'onde transverse électrique (onde magnétique **B**) :

$$\left\{ \begin{array}{l} E_z = 0 \\ E_\rho = -i \frac{nk}{\rho} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} J_n \left( \frac{\xi_p}{R} \rho \right) \operatorname{Re}(Ae^{in\varphi}) e^{-iqz} e^{i\alpha x} \\ E_\varphi = \frac{\xi_p k}{R} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} J_n' \left( \frac{\xi_p}{R} \rho \right) \operatorname{Re}(Ae^{in\varphi}) e^{-iqz} e^{i\alpha x} \end{array} \right. , \left\{ \begin{array}{l} B_z = -i \frac{\xi_p^2}{R^2} J_n \left( \frac{\xi_p}{R} \rho \right) \operatorname{Re}(Ae^{in\varphi}) e^{-iqz} e^{i\alpha x} \\ B_\rho = -\frac{q\xi_p}{R} J_n' \left( \frac{\xi_p}{R} \rho \right) \operatorname{Re}(Ae^{in\varphi}) e^{-iqz} e^{i\alpha x} \\ B_\varphi = -i \frac{nq}{\rho} J_n \left( \frac{\xi_p}{R} \rho \right) \operatorname{Re}(Ae^{in\varphi}) e^{-iqz} e^{i\alpha x} \end{array} \right.$$

Chaque type d'onde est déterminé par un groupe de deux nombres entiers  $(\nu, n)$ . A une fréquence déterminée  $f = \frac{kv}{2\pi}$  correspond une série de valeurs de  $q$  possibles :

$$q^2 = \left( \frac{2\pi f}{v} \right)^2 - \frac{\lambda_p^2}{R^2} \quad \text{ou} \quad q^2 = \left( \frac{2\pi f}{v} \right)^2 - \frac{\xi_p^2}{R^2} .$$

Comme précédemment la fréquence la plus basse des ondes **E** correspond à  $\nu = 0$ , soit  $f_{\min} = \frac{72145}{2\pi R}$  Mhz ,

la fréquence la plus basse des ondes **B** est pour  $\nu = 1$ , soit  $f_{\min} = \frac{55\,236}{2\pi R}$  Mhz ; pour  $q = 0$  les fréquences minimum ont une longueur d'onde infinie et une *vitesse de propagation infinie* ( $\zeta$ ) dans le guide.

On peut ici remarquer que la solution  $a = 0$  n'est jamais prise en compte : dans ce cas la fonction  $R$  du produit de Laplace serait  $R(\rho) = \alpha\rho^n + \beta\rho^{-n}$ , ce qui donne pour  $E_\varphi$  (lequel doit s'annuler en  $\rho = R$  et  $\rho = 0$ ) :  $E_\varphi = -inq(\alpha\rho^{n-1} + \beta\rho^{-n-1}) \operatorname{Re}(Ae^{in\varphi}) e^{-iqz} e^{i\alpha x}$ , soit  $E_\varphi = \frac{1}{\rho} e^{-iqz} e^{i\alpha x} + \dots$  qui est infini lorsque l'on est sur (Oz). On ne peut donc pas annuler  $E_\varphi$ . Le raisonnement vaut également pour les ondes **B**.

### 3-g : Le cas du guide coaxial

Le câble coaxial, rentré dans les mœurs courantes pour la transmission des ondes HF de la télévision, est constitué de deux cylindres imbriqués l'un dans l'autre. La situation se complique par le fait que le domaine d'existence des solutions ne contient pas l'axe du cylindre et que l'on ne peut exclure la solution en  $Y_n$ .

Le produit de Laplace  $U = e^{i\alpha x} \operatorname{Re}(Ae^{-in\varphi}) \operatorname{Re}(Be^{-iqz}) \operatorname{Re}(CZ_n(a\rho))$  du **3-e** contiendra donc le terme  $\operatorname{Re}(CZ_n(a\rho)) = k_1 J_n(a\rho) + k_2 Y_n(a\rho)$  où les constantes  $k_1$  et  $k_2$  sont déterminées par les conditions aux limites :

$$\begin{cases} k_1 J_n(aR_1) + k_2 Y_n(aR_1) = 0 \\ k_1 J_n(aR_2) + k_2 Y_n(aR_2) = 0 \end{cases}$$

où  $R_1$  et  $R_2$  sont les rayons extérieur et intérieur du câble coaxial. Pour que ce système admette des solutions non nulles, il faut que son déterminant soit nul, soit

$$J_n(aR_1)Y_n(aR_2) - J_n(aR_2)Y_n(aR_1) = 0 .$$

Soit  $\lambda_i$  une des racines de cette équation, on aura alors pour les ondes transverses magnétiques :

$$R(\rho) = Y_n(\lambda_i R_1) J_n(\lambda_i \rho) - J_n(\lambda_i R_1) Y_n(\lambda_i \rho).$$

Pour les ondes transverses électriques le raisonnement est identique mais on prend les racines  $\mu_i$  de

$$J'_n(aR_1) Y'_n(aR_2) - J'_n(aR_2) Y'_n(aR_1) = 0,$$

ce qui donne :  $R(\rho) = Y'_n(\mu_i R_1) J_n(\mu_i \rho) - J'_n(\mu_i R_1) Y_n(\mu_i \rho)$ .

Les méthodes vues précédemment permettent de résoudre facilement et d'écrire les solutions en général ;

par contre l'élimination du terme  $E_\varphi = \frac{1}{\rho} e^{-iqz} e^{i\alpha r} + \dots$  n'est plus possible,  $\rho$  n'étant jamais nul. Le terme

$R(\rho) = \alpha \rho^n + \beta \rho^{-n}$  lui, n'est toujours pas possible car il est impossible de trouver A, B et n pour lesquels  $E_z$  et  $E_\varphi$  soient nuls pour  $\rho = R_1$  ou  $\rho = R_2$ . On a donc la solution suivante :

$$E_z = E_\varphi = B_z = B_\varphi = 0 \text{ et } q \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} B_\varphi = k E_\varphi = A \frac{1}{\rho} e^{-iqz} e^{ikvt}$$

pour laquelle on peut choisir n'importe quelle fréquence. Il n'y a donc pas de fréquence de coupure dans ce cas, ce qui explique son utilité dans les transports haute fréquence.

Signalons que le même problème, mais avec plusieurs cylindres à l'intérieur d'un guide, se pose pour les fibres optiques et que la solution analytique n'existe pas. Les ressources modernes de calcul s'imposent alors et nécessitent le recours à des logiciels et des traitements spécialisés.

Voir par exemple [http://www.cerfacs.fr/emc/FileReports/TR\\_EMC\\_98\\_32.pdf](http://www.cerfacs.fr/emc/FileReports/TR_EMC_98_32.pdf)