La Fonction Gamma

La fonction Γ est la seule à pouvoir contester la position dominante du couple infernal constitué de l'exponentielle et du logarithme.

Gérald Tennenbaum

Sommaire

1. Les débuts d'une star

En 1755, Euler publie *Institutiones calculi integralis* (qu'il complètera en 1768) où l'on rencontre les fonctions (ou *intégrales*) appelées communément aujourd'hui *eulériennes* ; la plus connue est la fonction Γ, dite *intégrale eulérienne de seconde espèce* nommée ainsi par Legendre.

En fait depuis déjà longtemps Euler s'intéressait à cette fonction : en 1729, s'intéressant à l'interpolation des fonctions il obtient l'expression $\Gamma(x+1)=\prod_{n=1}^{\infty}\frac{n^{1-x}(n+1)^x}{n+x}$ permettant de représenter $x!$ avec x réel…

Puis, suite à une correspondance avec Christian Goldbach, dans un article publié en 1730 il s'intéresse dans la foulée de Wallis à l'intégrale

$$\int_0^1 x^\alpha(1-x)^n\,dx=\frac{n!}{(\alpha+1)(\alpha+2)\dots(\alpha+n)(\alpha+n+1)}$$ avec $\alpha>0$ (IPP et récurrence).

Il effectue alors le changement de variable $y = x^{\alpha+1}$ dans l'intégrale, ce qui donne $\frac{1}{\alpha+1}\int_0^1 (1-y^{\frac{1}{\alpha+1}})^n\,dy$ d'où en multipliant des deux côtés par $(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+n)(\alpha+n+1)$:

$$(\alpha+2)\ldots(\alpha+n)(\alpha+n+1)\int_0^1 (1-y^{\frac{1}{\alpha+1}})^n\,dy = n!$$

A l'intérieur de l'intégrale il utilise $\lim_{h\to 0}\frac{1-y^h}{h} = -\ln y$, ce qui lui fournit en passant à la limite lorsque α tend vers $+\infty$ $\left(\lim_{\alpha\to+\infty}\frac{(\alpha+2)\ldots(\alpha+n)(\alpha+n+1)}{(\alpha+1)^n}\right)\int_0^1 (-\ln y)^n\,dy = n! \Leftrightarrow \int_0^1 \left(\ln\frac{1}{y}\right)^n dy = n!$

Pour terminer il pose $\ln\frac{1}{y} = t$ d'où $\int_0^\infty e^{-t}t^n\,dt = n!$.

Gauss travaillera de manière approfondie sur Γ en partant de l'intégrale précédente : il utilise

$$\Gamma_n(z) = \int_0^n t^{z-1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n dt = n^z\int_0^n u^{z-1}(1-u)^n\,du = \frac{n^z n!}{z(z+1)\ldots(z+n)}$$

en faisant une succession d'IPP.
Par ailleurs en travaillant sur les fonctions hypergéométriques (déjà vues par Euler)

$$F(a, b\,;c\,;z) = 1 + \frac{ab}{1.c}z + \frac{a(a+1)b(b+1)}{1.2.c(c+1)}z^2 + \ldots$$

il retrouve Γ dans tous les coins : $F(a, b\,;c\,;z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(a+n)\Gamma(b+n)\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(c+n)}\frac{z^n}{n!}$.

Enfin le dernier acteur de l'histoire est Weierstrass qui donne une application exemplaire de son théorème de représentation d'une fonction holomorphe par un produit infini en obtenant

$$\Gamma(z) = e^{-\gamma z}\frac{1}{z}\prod_{k=1}^{\infty}\frac{k}{(k+z)}e^{\frac{z}{k}}.$$

D'un point de vue concret on retrouve Γ dans énormément de situations : très liée aux fonctions hypergéométriques, elles-mêmes solutions de bon nombre d'équations différentielles on va la rencontrer dans les fonctions de Bessel, la transformée de Laplace, etc. Par ailleurs les probabilités renvoient facilement sur des distributions de probabilité liées à Γ.

2. Le point de vue réel

2-a : Définitions

Euler définit la fonction *Bêta* ou *intégrale eulérienne de première espèce* par

$$B(a, b) = \int_0^1 u^{a-1}(1-u)^{b-1}\,du$$

(enfin pas tout à fait, mais ça revient au même). Tant que *a* et *b* sont positifs cette intégrale a un sens ; elle devient infinie lorsque *a* ou *b* est nul ou négatif.

En faisant le changement de variable $u = 1 - v$, $du = -dv$ les bornes deviennent 1 et 0, ce qui donne $B(a, b) = -\int_1^0 (1-v)^{a-1}(v)^{b-1}\,dv = B(b, a)$.

Autre changement de variable : $u = \sin^2\theta$, $du = 2\sin\theta\cos\theta\,d\theta$, les bornes deviennent 0 et $\pi/2$ d'où $B(a, b) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2a-1}\theta\cos^{2b-1}\theta\,d\theta$; si on prend par exemple $a = b = 1/2$, on a immédiatement $B(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta = \pi$.

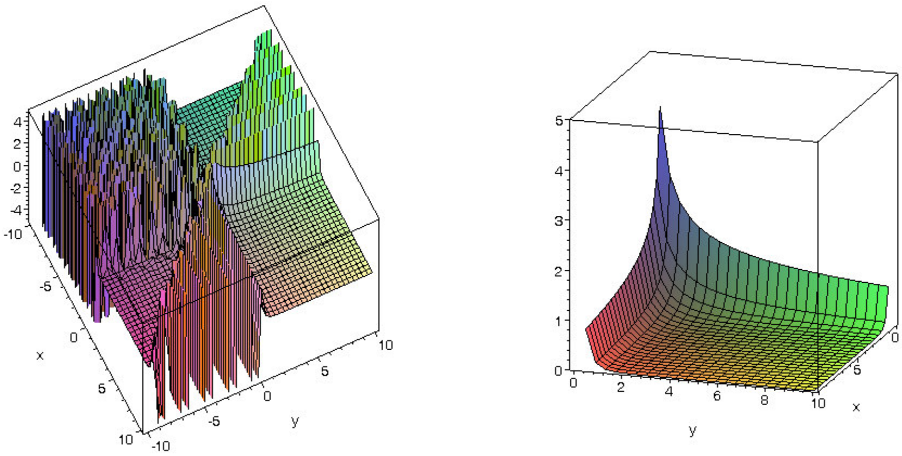


fig. 1 : deux vues de $B(x, y)$

Condidérons maintenant la fonction Gamma ou *intégrale eulérienne de deuxième espèce* :

$$\Gamma(a) = \int_0^\infty u^{a-1} e^{-u} du$$

qui devient infinie lorsque a est négatif ou nul.

Faisons le changement de variable $u = x^2$, $du = 2x dx$, ce qui donne également

$$\Gamma(a) = 2\int_0^\infty x^{2a-1} e^{-x^2} dx \ .$$

En fait le -1 en exposant de u est plutôt gênant et est dû à Legendre pour des raisons probablement pratiques, lesquelles raisons ne sont plus très pratiques actuellement, aussi on définit parfois Gamma avec u^a au lieu de u^{a-1}.

Voici ce qu'en dit H. M. Edwards dans son très bel ouvrage sur la fonction Zêta :

« *Unfortunately, Legendre subsequently introduced the notation* $\Gamma(s)$ *for* $\Pi(s-1)$ (Edwards considère comme Gauss la fonction $\Pi(s) = \int_0^\infty e^{-x} x^s dx$ plutôt que Γ). *Legendre's reasons for considering (n − 1)! instead of n! are obscure (perhaps he felt it was more natural to have the first pole occur at s = 0 rather than s = −1) but, whatever the reason, this notation prevailed in France and, by the end of the nineteenth century, in the rest of the world as well. Gauss's original notation appears to me to be much more natural and Riemann's use of it gives me a welcome opportunity to reintroduce it.* »

2-b : ***Propriétés de base***

* $\Gamma(a) = (a-1)\Gamma(a-1)$: supposons $a > 1$ et intégrons par parties

$$\Gamma(a) = \int_0^\infty u^{a-1} e^{-u} du = -\int_0^\infty u^{a-1}(-e^{-u}) du$$

$$= -\left[e^{-u} u^{a-1} \right]_0^\infty + (a-1)\int_0^\infty u^{a-2} e^{-u} du = (a-1)\Gamma(a-1).$$

* $\Gamma(n) = (n-1)!$: évident par récurrence sur la propriété précédente et le calcul de

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-u} du = \left[-e^{-u} \right]_0^\infty = 0 + 1 = 1\ .$$

2-c : ***Réduction des fonctions Bêta aux fonctions Gamma***

Considérons la surface d'équation $z = f(x, y) = x^{2a-1} e^{-x^2} y^{2b-1} e^{-y^2}$. Nous allons calculer le volume délimité latéralement par les plans xOz et yOz, inférieurement par le premier quadrant du plan xOy et supérieurement par la surface $z = f(x, y)$. Ce volume est donné par $V = \iint z d\omega$, l'intégration étant étendue au quart de plan xOy. Pour évaluer ce volume nous emploierons successivement les coordonnées cartésiennes et les coordonnées polaires et la lumière surgira.

En cartésiennes : faisons varier y de 0 à R, x de 0 à R' :

$$V=\int_0^R\int_0^{R'}y^{2b-1}e^{-y^2}x^{2a-1}e^{-x^2}\,dxdy=\int_0^R y^{2b-1}e^{-y^2}\left[\int_0^{R'}x^{2a-1}e^{-x^2}\,dx\right]dy$$

d'où en faisant tendre R' vers $+\infty$, $V=\int_0^R y^{2b-1}e^{-y^2}\frac{1}{2}\Gamma(a)dy=\frac{1}{2}\Gamma(a)\int_0^R y^{2b-1}e^{-y^2}dy$, soit enfin en faisant tendre R vers $+\infty$, $V=\frac{1}{2}\Gamma(a)\frac{1}{2}\Gamma(b)$.

On passe maintenant en polaires dans le plan xOy avec $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$, $z=r^{2a+2b-2}e^{-r^2}\cos^{2a-1}\theta\sin^{2b-1}\theta$ et $dxdy=rdrd\theta$ comme vu dans le livre. On a alors

$$V=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\infty'}zrdrd\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2a-1}\theta\sin^{2b-1}\theta\left[\int_0^{\infty}r^{2a+2b-1}e^{-r^2}dr\right]d\theta.$$

Le crochet intérieur vaut $\frac{1}{2}\Gamma(a+b)$ d'où

$$V=\frac{1}{2}\Gamma(a+b)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2a-1}\theta\sin^{2b-1}\theta d\theta=\frac{1}{2}\Gamma(a+b)\frac{1}{2}B(a,b).$$

Conclusion :

$$B(a,b)=\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$$

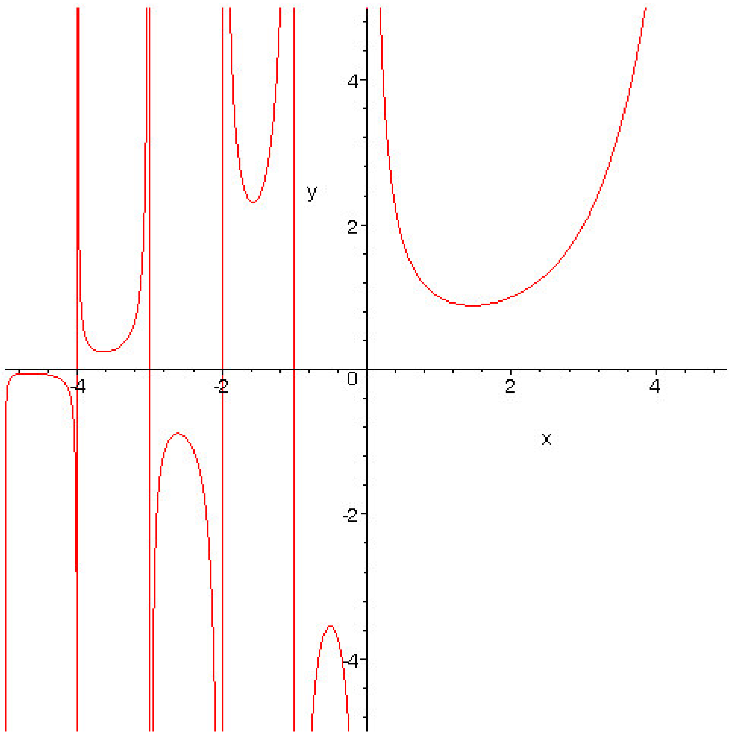


fig. 2 : une vue de Gamma(x)

2-d : ***Retour à l'intégrale de Gauss***

Si dans la relation précédente nous faisons $a=b=\frac{1}{2}$ nous avons $B(\frac{1}{2},\frac{1}{2})=\frac{\Gamma(1/2)^2}{\Gamma(1)}$ où nous connaissons certains termes : $\pi=\frac{\Gamma(1/2)^2}{1}\Leftrightarrow\Gamma(1/2)^2=\pi\Rightarrow\Gamma(1/2)=\sqrt{\pi}$ (on prend la racine positive car Γ est positive). Par contre

$$\Gamma(1/2)=2\int_0^{\infty}x^0e^{-x^2}dx\Rightarrow\int_0^{\infty}e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\Rightarrow\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}\ .$$

En fait la démonstration du livre n'est qu'un cas particulier de la méthode précédente.

2-e : ***Intégrales de Fresnel***

La méthode vue dans le livre laissait quand même à désirer, aussi allons nous refaire la démonstration en utilisant la même méthode : on considère le volume délimité par la surface $z=f(x,y)=e^{-y^2}\cos x^2$ et par les mêmes plans que précédemment.

En cartésiennes : $V=\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}e^{-y^2}\cos x^2dxdy=\int_0^{\infty}e^{-y^2}dy\int_0^{\infty}\cos x^2dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}I$ où I désigne la première intégrale de Fresnel.

En polaires : $V=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\infty}e^{-r^2\sin^2\theta}\cos(r^2\cos^2\theta)rdrd\theta$; ici c'est un peu plus compliqué, aussi on fait le changement de variable $u=r^2\cos^2\theta$ (r variable, θ fixe), $du=2rdr\cos^2\theta$, les bormes restent les mêmes. On a alors

$$V=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\infty}e^{-u\tan^2\theta}\cos(u)\frac{1}{2\cos^2\theta}dud\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2\cos^2\theta}\left[\int_0^{\infty}e^{-u\tan^2\theta}\cos(u)du\right]d\theta\ .$$

L'intégrale dans le crochet est d'une forme facile à calculer : $\int_0^{\infty}e^{-\lambda u}\cos u du=\frac{\lambda}{1+\lambda^2}$ (double IPP ou complexes), ce qui donne $V=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2\cos^2\theta}\frac{\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}d\theta=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}\frac{t^2}{1+t^4}dt$ en faisant le changement de variables $t=\tan\theta$.

La dernière intégrale se calcule (assez) facilement puisque c'est une fraction rationnelle, et on obtient finalement $V=\frac{1}{2}\sqrt{2}\frac{\pi}{4}$ d'où $\frac{\sqrt{\pi}}{2}I=\frac{\pi\sqrt{2}}{8}\Leftrightarrow I=\frac{\sqrt{2\pi}}{4}$. En refaisant la même chose avec sinus on obtient également $\int_0^{\infty}\sin x^2dx=\frac{\sqrt{2\pi}}{4}$.

Précisément, le calcul effectué rapidement dans le livre montre l'efficacité des méthodes à base de complexes, aussi (et on pouvait s'en douter) allons nous développer davantage les propriétés de *Bêta* et *Gamma* en passant par l'analyse complexe.

3. Le point de vue complexe

3-a : ***Gamma et Bêta dans le demi-plan complexe Re(z)>0***

L'idée de départ est bien sûr d'étendre la définition de $\Gamma(a)=\int_0^{\infty}u^{a-1}e^{-u}du$ au plan complexe en écrivant $\Gamma(z)=\int_0^{\infty}u^{z-1}e^{-u}du$ avec z complexe ; il est clair que $u^{z-1}=e^{(z-1)\ln u}$ donc

$$u^{z-1}=e^{(\operatorname{Re}z-1)\ln u+i\operatorname{Im}z\ln u}=e^{(\operatorname{Re}z-1)\ln u}e^{i\operatorname{Im}z\ln u}\ \text{ et }\ \left|u^{z-1}e^{-u}\right|=e^{-u}u^{\operatorname{Re}z-1}\ .$$

Prenons $0 < a < \operatorname{Re} z < b$, on a $\left|u^{z-1}e^{-u}\right| \le e^{-u}u^{b-1}$ lorsque $u \ge 1$ et $\left|u^{z-1}e^{-u}\right| \le u^{a-1}$ lorsque $0 < u < 1$; considérons alors le domaine $U = \{z \in \mathbb{C} / a < \operatorname{Re} z < b\}$, I =]0 ; +∞[et $M(t) = \begin{cases} e^{-t}t^{b-1} \text{ si } t \ge 1 \\ t^{a-1} \text{ si } 0 < t < 1 \end{cases}$; d'après le théorème de dérivation sous le signe somme les conditions sont remplies pour que $\Gamma(z)$ soit holomorphe dans U.

En faisant tendre a vers 0 et b vers l'infini on obtient que $\Gamma(z)$ est holomorphe dans le demi-plan $U = \{z / \operatorname{Re}(z) > 0\}$.

La relation $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ obtenue en remplaçant a par $z + 1$ est également valable dans U car les deux membres de l'égalité sont holomorphes. Cette relation est importante car elle précise une propriété fondamentale de Γ à travers son *équation fonctionnelle* (au même titre que $f(x+y) = f(x)f(y)$ définit les fonctions exponentielles). Cette équation peut servir de définition de Γ et ses nombreuses propriétés en découler (Emil Artin).

H. Wielandt a d'ailleurs montré en 1939 que si on a une fonction holomorphe F dans U telle que $F(z+1) = zF(z)$ et $\sup\{|F(z)| / 1 \le \operatorname{Re} z \le 2\} < \infty$ alors $F(z) = F(1)\Gamma(z)$ [1].

Le th. de dérivation donne également le résultat suivant :

$$\Gamma^{(k)}(z) = \int_0^{\infty} e^{-u}(\ln u)^k u^{z-1}\,du$$

et tout particulièrement $\Gamma'(z) = \int_0^{\infty} \ln u . e^{-u} u^{z-1}\,du$.

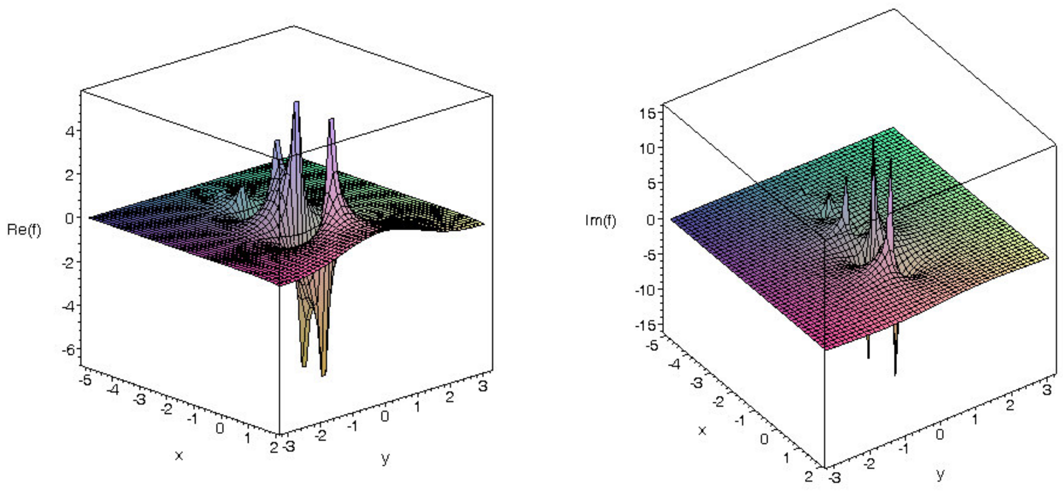


fig. 3 : Gamma(z) : vues des parties réelles et imaginaires ; on voit bien comment la fonction contourne les pôles

1.

[1] Voir démonstration dans S.D. Chatterji, *Analyse complexe*, p 368

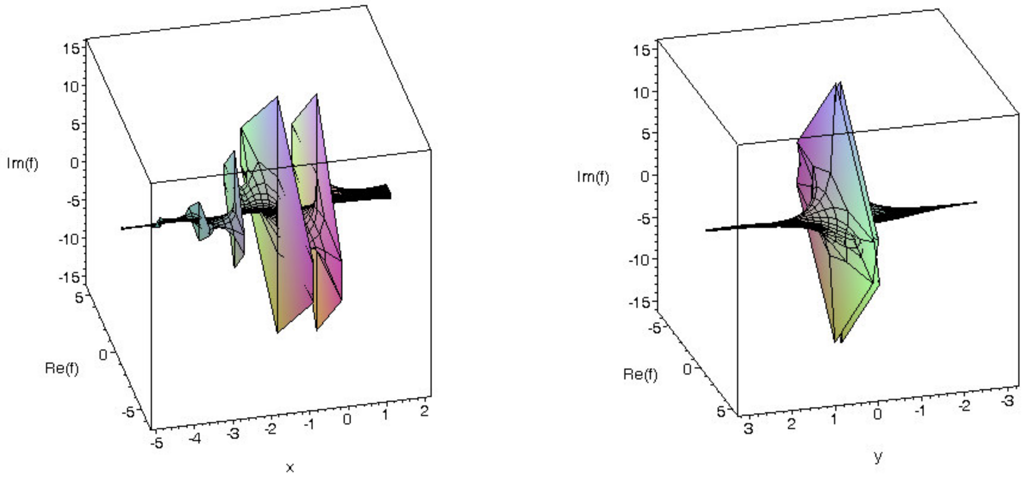


fig. 4 : Gamma(z) : projections différentes

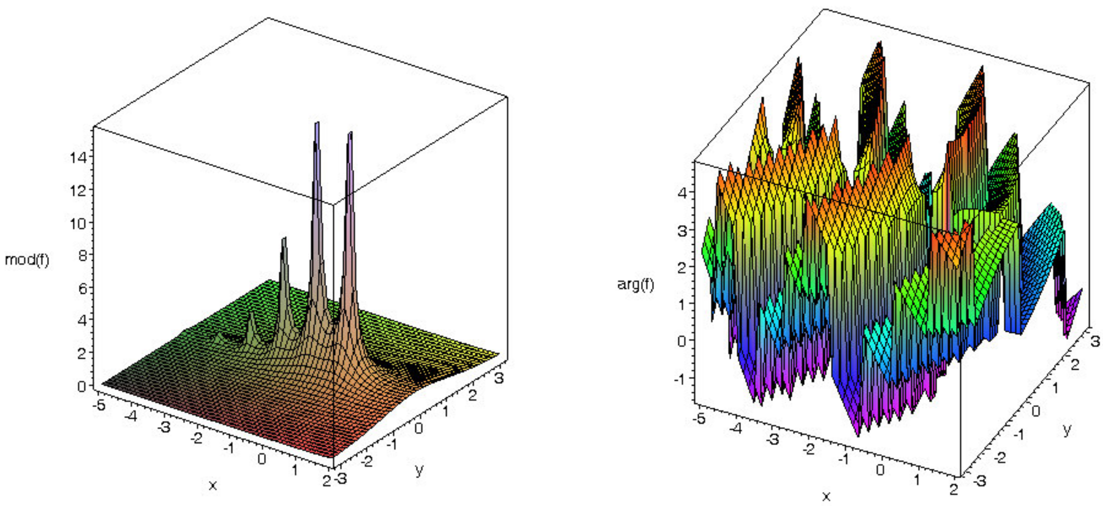


fig. 5 : module et argument de Gamma(z)

3-b : ***Prolongement analytique***

Grâce à $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ on a un prolongement analytique immédiat de Γ à tout le plan complexe sauf aux points de $-\mathbb{N} = \{0, -1, -2, \ldots\}$ par récurrence :

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z} = \frac{\Gamma(z+2)}{z(z+1)} = \ldots = \frac{\Gamma(z+n)}{z(z+1)\ldots(z+n-1)},$$

dont la partie droite est holomorphe toujours dans $\mathrm{Re}(z) > -n$ sauf aux points $0, -1, \ldots, -(n-1)$. Ceci est vrai pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et donc dans tout $\mathbb{C} - \{-\mathbb{N}\}$.

On peut faire le prolongement également à partir de la remarque suivante : à chaque pôle de $-\mathbb{N}$, Γ a un résidu égal à $\frac{(-1)^n}{n!}$. En effet, partons de la définition $\Gamma(z) = \int_0^\infty u^{z-1}e^{-u}du$ que nous décomposons en deux intégrales sur $\mathrm{Re}(z) > 0$:

$$\Gamma(z)=\phi(z)+\psi(z)=\int_0^1 u^{z-1}e^{-u}du+\int_1^{+\infty}u^{z-1}e^{-u}du\,.$$

La fonction ψ est holomorphe pour les mêmes raisons qu'au 2.a. et on a

$$\phi(z)=\int_0^1\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}t^{n+z-1}\right\}dt=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\int_0^1 t^{n+z-1}dt=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!(n+z)}\,.$$

La fonction $f_n(t)=\frac{1}{n!}\int_0^1 t^{n+z-1}dt$ est bornée en module par $\frac{1}{n!(n+\varepsilon)}$ pour tout $\varepsilon>0$ tel que $\mathrm{Re}(z)>\varepsilon>0$ ce qui autorise l'échange de l'intégrale et de la somme (th. de Fubini).

La série $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!(n+z)}$ définit une fonction holomorphe dans $\mathbb{C}-\{-\mathbb{N}\}$ car $\left|\frac{(-1)^n}{n!(z+n)}\right|\le\frac{1}{cn!}$ où c est l'infimum strictement positif des $|z+n|$ dans un disque dont la frontière ne contient aucun élément de $-\mathbb{N}$. Cette série est normalement convergente et coïncide avec $\phi(z)$. Pour chaque terme $-n$, le coefficient a_{-1} de la série est alors $\frac{(-1)^n}{n!}$.

3-c : ***Le produit infini de Gamma***

Reprenons le résultat obtenu dans la première partie (*fonctions complexes - généralités, en cours de rédaction*) :

$$f(z)=\frac{\sin\pi z}{\pi}=z\prod_{k\ge1}\left(1-\frac{z^2}{k^2}\right)=z\prod_{k\in\mathbb{Z}^*}\left(1-\frac{z}{k}\right).$$

Nous allons en profiter pour établir proprement quelques résultats utilisés dans le livre dans notre étude de la fonction *zêta* durant laquelle nous avions été franchement limite…

On voit sur l'écriture précédente que l'on peut découper *f* en produit de deux fonctions : pour $k<0$ et pour $k>0$; de plus on peut s'arrêter à une valeur de *k*, *n*, et nous intéresser à l'inverse de *f* :

$$\frac{1}{f(z)}=\frac{1}{z}\prod_{k\ge1}\left(\frac{k}{k+z}\right)=\frac{1}{z}\prod_{k\ge1}\left(\frac{1}{1+\frac{z}{k}}\right)\ ;$$

pour *k* suffisamment grand on a une suite géométrique convergente pour chaque terme, aussi considérons $k>n$:

$$k_n(z)=\prod_{k>n}\left(\frac{1}{1+\frac{z}{k}}\right)=\prod_{k>n}\left(1-\frac{z}{k}+\frac{z^2}{k^2}-\ldots\right)\approx\prod_{k>n}\left(1-\frac{z}{k}\right)\ ;$$

d'où $\log k_n(z)\approx\sum_{k\ge n}\log\left(1-\frac{z}{k}\right)\approx -z\sum_{k\ge n}\frac{1}{k}$, soit à peu près $\log k_n(z)\approx -z\log(n)\Rightarrow k_n(z)\approx n^{-z}$.

Considérons donc la suite de fonctions $g_n(z)=z\frac{n^{-z}}{n!}\prod_{k=1}^{n}(z+k)$, d'après ce que nous venons de faire si cette suite converge vers une fonction *g*, l'inverse de *g* devrait fortement ressembler à 1/*f*…

Etudions donc la convergence de g_n : on a $\frac{g_n(z)}{g_{n-1}(z)}=\left(1+\frac{z}{n}\right)\left(1-\frac{1}{n}\right)^z=u_n(z)$, prenons $|z|\le r$ avec alors

$$\begin{aligned}|\log u_n(z)|&=\left|\log\left(1+\frac{z}{n}\right)+z\log\left(1-\frac{1}{n}\right)\right|=\left|\frac{z}{n}-\frac{z^2}{2n^2}+\frac{z^3}{3n^3}-\ldots+z\left(-\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}-\frac{1}{3n^3}\ldots\right)\right|\\&=\left|-\frac{z^2}{2n^2}+\frac{z^3}{3n^3}-\ldots+z\left(-\frac{1}{2n^2}-\frac{1}{3n^3}\ldots\right)\right|\le2\left(\frac{r^2}{2n^2}+\frac{r^3}{3n^3}+\ldots\right)\le2\frac{r^2}{n^2}\end{aligned}$$

pour $\frac{r}{n}$ assez petit ($|z|\le|z^2|$).

La série $\sum \log u_n(z)$ converge donc normalement ainsi que le produit infini

$$g_1(z)\prod_{k=1}^{k=n}\frac{g_k(z)}{g_{k-1}(z)} = g_1(z)\frac{g_2(z)}{g_1(z)}\frac{g_3(z)}{g_2(z)}\dots\frac{g_n(z)}{g_{n-1}(z)} = g_n(z)$$

sur tout compact du plan.

Il existe donc une fonction holomorphe g, limite uniforme des g_n dont les zéros (simples) sont les entiers négatifs : $-1, -2, \dots, -n, \dots$

Calculons $\lim_{n\to\infty}\frac{g_n(z)}{g_n(z+1)} = \lim_{n\to\infty}\frac{nz}{n+z+1} = z$, par conséquent la fonction $\frac{g(z)}{g(z+1)} = z$ est holomorphe ; enfin $\lim_{n\to\infty} g_n(1) = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n} = 1$ d'où $g(1)=1$.

La fonction inverse de g est une fonction méromorphe de pôles simples les entiers négatifs, limite uniforme de

$$\frac{n!n^z}{z(z+1)\dots(z+n)}$$

qui est donc la fonction Γ étendue à la variable complexe.

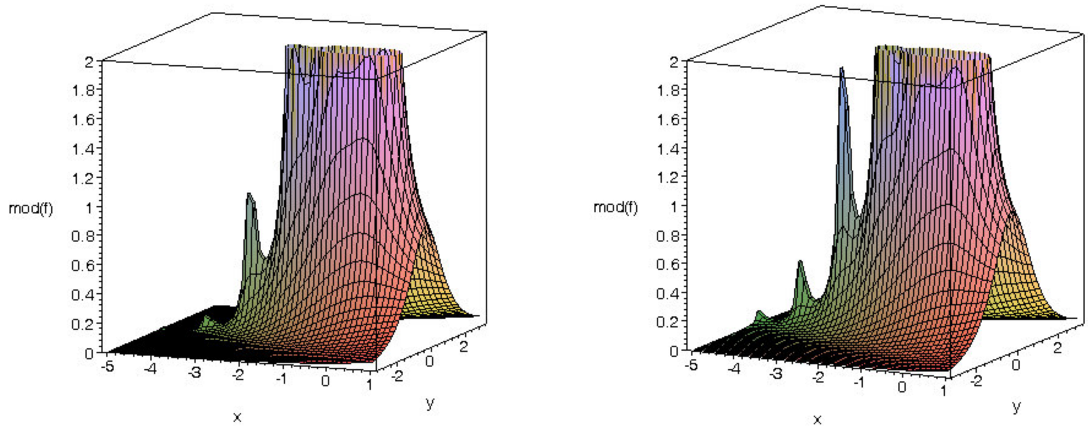


fig. 6 : les premiers pôles de Gamma(z) avec le module du produit infini : n=5, n=25

On peut remarquer sur les figures ci-dessus la très lente croissance du module au voisinage des pôles dès que l'on s'écarte de $z = 0$ et $z = -1$. Chose que l'on voyait déjà apparaître sur la fig. 2.

Calculons maintenant $g(z)g(1-z) = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1-z}{n} z\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right) = \frac{\sin \pi z}{\pi}$ d'où

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z},$$

appelée *formule des compléments.* Particulièrement si $z = 1/2$, on a $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

On obtient également la *formule de duplication* due à Legendre :

$$\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}\,2^{1-2z}\,\Gamma(2z)$$

que le lecteur se fera une joie de démontrer (vérifier que la dérivée logarithmique de $\Gamma(z)$ plus celle de $\Gamma(z+1/2)$ est égale à 2 fois celle de $\Gamma(2z)$, puis intégrer en cherchant les constantes avec $z = 1/2$ puis $z = 1$).

On peut faire la démonstration de manière directe : on écrit

$$\Gamma(z)=\lim_{n\to\infty}\frac{n!n^z}{z(z+1)\dots(z+n)},$$

$$\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n!n^{z+\frac{1}{2}}}{(z+1/2)(z+1/2+1)\dots(z+1/2+n)},$$

$$\Gamma(2z)=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n)!(2n)^{2z}}{2z(2z+1)\dots(2z+2n)}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n)!(2n)^{2z}}{2^{2n+1}z(z+1/2)\dots(z+n-1/2)(z+n)}.$$

On fait maintenant le quotient $\dfrac{2^{2z-1}\Gamma(z)\Gamma(z+1/2)}{\Gamma(2z)}=\dfrac{(n!)^2n^{1/2}2^{2n-1}}{(2n-1)!}=\sqrt{\pi}$ où l'on retrouve les intégrales de Wallis. Cette deuxième méthode permet d'obtenir également la *formule de Gauss-Legendre* :

$$\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{k}\right)\Gamma\left(z+\frac{2}{k}\right)\dots\Gamma\left(z+\frac{k-1}{k}\right)=(2\pi)^{\frac{k-1}{2}}k^{-kz+\frac{1}{2}}\Gamma(kz).$$

Allons un peu plus loin en revenant à notre fonction *f* de tout à l'heure : prenons un terme du produit dans g_n que nous écrivons

$$\left(1+\frac{z}{k}\right)=\left(1+\frac{z}{k}\right)e^{-\frac{z}{k}}e^{\frac{z}{k}},$$

par ailleurs $n^{-z}=e^{-z\ln n}$ d'où

$$g_n(z)=z\left(\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{z}{k}\right)e^{-\frac{z}{k}}\right)e^{z(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n}-\ln n)}$$

où nous reconnaissons la constante d'Euler : $\gamma=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n}-\ln n\right)$.

On a donc $g(z)=ze^{\gamma z}\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{k}\right)e^{-\frac{z}{k}}$ d'où le *produit infini de Weierstrass* :

$$\Gamma(z)=e^{-\gamma z}\frac{1}{z}\prod_{k=1}^{\infty}\frac{k}{(k+z)}e^{\frac{z}{k}}.$$

On a alors

$$\log\Gamma(z)=-\gamma z+\log\frac{1}{z}+\sum_{k\geq1}\frac{z}{k}-\log\left(1+\frac{z}{k}\right),$$

relation que nous dérivons sans hésiter une seconde :

$$\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}=-\gamma-\frac{1}{z}+\sum_{k\geq1}\frac{1}{k}-\frac{1}{k+z}=U(z)\ ;$$

dérivons encore une fois :

$$U'(z)=\frac{1}{z^2}+\sum_{k\geq1}\frac{1}{(z+k)^2}=\sum_{k\geq0}\frac{1}{(z+k)^2}.$$

Nous avons déjà rencontré la somme de droite : $U'(z)=\left(\dfrac{\pi}{\sin\pi z}\right)^2$, on en déduit que Γ est convexe.

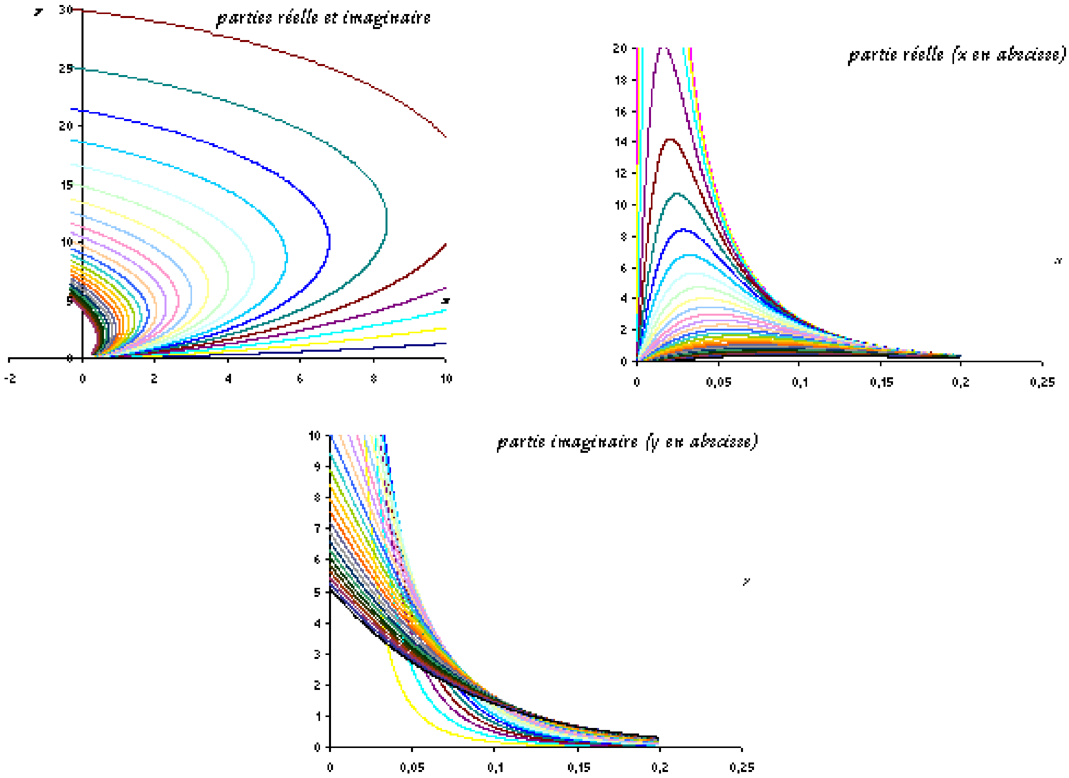
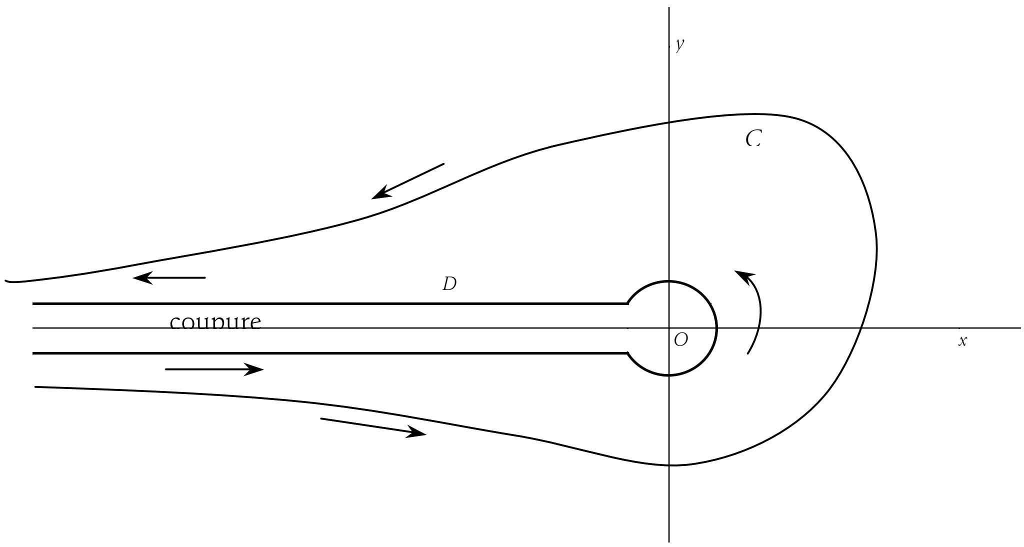


fig. 7 : fonction Gamma avec Excel : x, y dans [0 ; 2].

3-d : ***Représentation intégrale de Hankel***

On essaie de représenter Γ par une intégrale de Cauchy ; on considére pour cela l'intégrale $I=\dfrac{1}{2i\pi}\displaystyle\int_D \frac{e^z}{z^{\nu+1}}dz$ où D est le lacet représenté sur la figure ci-dessous.



Le long du petit cercle, de rayon r, on a avec $z=re^{i\theta}$:

$$I_1=\frac{1}{2i\pi}\int_r^r\int_{-\pi}^{\pi} r^{-\nu-1}e^{-i(\nu+1)\theta+r(\cos\theta+i\sin\theta)}ie^{i\theta}rdrd\theta=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} r^{-\nu}e^{-i\nu\theta+r(\cos\theta+i\sin\theta)}d\theta\ ;$$

quand r tend vers 0, I_1 tend vers 0 si $\mathrm{Re}(\nu)<0$. Sur le contour C au-dessous de la coupure on a $I_2=-\frac{e^{\nu\pi i}}{2i\pi}\int_0^\infty e^{-x}x^{-\nu-1}dx$; sur le contour C au-dessus de la coupure on a $I_3=\frac{e^{-\nu\pi i}}{2i\pi}\int_0^\infty e^{-x}x^{-\nu-1}dx$. On a donc $I=I_2+I_3=\frac{e^{-\nu\pi i}-e^{\nu\pi i}}{2i\pi}\int_0^\infty e^{-x}x^{-\nu-1}dx=-\frac{\sin\pi\nu}{\pi}\Gamma(-\nu)$.

Le contour C se déformant aisément en le contour D, on a par prolongement $I=\frac{1}{2i\pi}\int_C\frac{e^z}{z^{\nu+1}}dz=-\frac{\sin\pi\nu}{\pi}\Gamma(-\nu)$ ou encore

$$\Gamma(\nu)=\frac{-1}{2i\sin\pi\nu}\int_C e^{-z}(-z)^{\nu-1}dz\ ;$$

ceci donne également en utilisant $\Gamma(1-\nu)=\frac{-1}{2i\sin(\pi-\pi\nu)}\int_C e^{-z}(-z)^{-\nu}dz$ et la formule des compléments $\Gamma(1-\nu)=\frac{-1}{2i\pi}\Gamma(\nu)\Gamma(1-\nu)\int_C e^{-z}(-z)^{-\nu}dz$ d'où

$$\frac{1}{\Gamma(\nu)}=\frac{-1}{2i\pi}\int_C e^{-z}(-z)^{-\nu}dz\,.$$

En faisant le changement de variable $u=-z$, on a alors (le chemin d'intégration ne change pas et est simplement parcouru dans le sens contraire)

$$\frac{1}{\Gamma(\nu)}=\frac{1}{2i\pi}\int_C e^u u^{-\nu}du\Leftrightarrow\frac{1}{\Gamma(z)}=\frac{1}{2i\pi}\int_C e^u u^{-z}du\,.$$

4. Gamma et la formule de Stirling

Comme on l'a vu dans le livre, le comportement à l'infini de $n!$ passe par l'établissement de la formule de Stirling obtenue grâce à la formule d'Euler - MacLaurin. La question se pose évidemment de la même manière pour Γ.

Si on réécrit la formule de Stirling pour z complexe (au lieu de n), on doit montrer que $\Gamma(z)\sim\sqrt{2\pi}z^{z-\frac{1}{2}}e^{-z}$, soit que $\lim\limits_{|z|\to\infty}\frac{\Gamma(z)}{\sqrt{2\pi}z^{z-\frac{1}{2}}e^{-z}}=1$; la limite ne se fera pas dans tout le plan complexe mais sous certaines conditions sur $\arg(z)$ que nous détaillerons plus loin.

Au préalable nous allons montrer un théorème fort utile qui montre d'ailleurs assez bien d'où vient le lien entre Γ et la transformée de Laplace : le *lemme de Watson*.

4-a : ***Le lemme de Watson***

Tout d'abord une définition : on dira qu'une série $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_k}{z^k}$ est un *développement asymptotique* d'une fonction f si $\lim\limits_{|z|\to\infty}z^n\left[f(z)-\sum_{k=0}^{n}\frac{a_k}{z^k}\right]=0$ pour tout $n=0, 1, 2, \ldots$; on écrit alors $f(z)\sim\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_k}{z^k}$.

Maintenant le lemme : supposons qu'au voisinage de $z=0$ la fonction $F(z)$ possède le développement $F(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k z^{\frac{k}{r}-1}$ avec $|z|\le a$ et $r>0$ et qu'il existe des constantes K et b positives telles que $|F(z)|<Ke^{b|z|}$ lorsque $|z|\ge a$ (F est au plus d'*ordre exponentiel* 1 à l'infini).

Alors pour $|\nu|$ grand, on a $\tilde{F}(z)=\int_0^\infty e^{-\nu z}F(z)dz\sim\sum_{n=0}^{\infty}a_n\Gamma\left(\frac{n}{r}\right)\nu^{-\frac{n}{r}}$ pour $-\frac{\pi}{2}<\arg(\nu)<\frac{\pi}{2}$.

Démonstration

Soit $s_n(\nu)=\int_0^\infty e^{-\nu z}\sum_{k=1}^n a_k z^{\frac{k}{r}-1}dz=\sum_{k=1}^n a_k\int_0^\infty e^{-\nu z}z^{\frac{k}{r}-1}dz=\sum_{k=1}^n a_k\Gamma\left(\frac{k}{r}\right)\nu^{-\frac{k}{r}}$; on a interverti intégrale et somme puisqu'on somme sur un nombre fini de termes.

Maintenant on a $F(z)=\sum_{k=0}^\infty a_n z^{\frac{n}{r}-1}$ au voisinage de 0, donc vu le type de croissance de F à l'infini, on doit pouvoir trouver une constante C_n telle que

$$\left|F(z)-\sum_{k=0}^n a_k z^{\frac{k}{r}-1}\right|\le C_n e^{b|z|}|z|^{\frac{n+1}{r}-1}$$

(le terme $|z|^{\frac{n+1}{r}-1}$ oblige $\left|F(z)-\sum_{k=0}^n a_k z^{\frac{k}{r}-1}\right|$ à tendre vers 0 en 0, le terme $C_n e^{b|z|}$ contrôle la croissance de $\left|F(z)-\sum_{k=0}^n a_k z^{\frac{k}{r}-1}\right|$ à l'infini ; C_n devant évidemment dépendre de n).

On passe à la transformée de Laplace en montrant que $|\nu|^{\frac{n}{r}}\left|\tilde{F}(\nu)-s_n(\nu)\right|$ tend bien vers 0 lorsque $|\nu|\to\infty$:

$$\begin{aligned}|\nu|^{\frac{n}{r}}\left|\tilde{F}(\nu)-s_n(\nu)\right|&=|\nu|^{\frac{n}{r}}\left|\int_0^\infty e^{-\nu z}F(z)dz-\sum_{k=0}^n a_k\Gamma\left(\frac{k}{r}\right)\nu^{-\frac{k}{r}}\right|=|\nu|^{\frac{n}{r}}\left|\int_0^\infty e^{-\nu z}\left(F(z)-\sum_{k=0}^n a_k\nu^{\frac{k}{r}-1}\right)dz\right|\\&\le|\nu|^{\frac{n}{r}}\int_0^\infty\left|e^{-\nu z}\left(F(z)-\sum_{k=0}^n a_k\nu^{\frac{k}{r}-1}\right)\right|dz\le|\nu|^{\frac{n}{r}}C_n\int_0^\infty\left|e^{-\nu z}\right|e^{b|z|}|z|^{\frac{n+1}{r}-1}dz=|\nu|^{\frac{n}{r}}C_n\int_0^\infty e^{-(|\nu|\cos\theta-b)|z|}|z|^{\frac{n+1}{r}-1}dz\\&=|\nu|^{\frac{n}{r}}C_n\int_0^\infty e^{-(|\nu|\cos\theta-b)u}u^{\frac{n+1}{r}-1}du=|\nu|^{\frac{n}{r}}C_n\left(|\nu|\cos\theta-b\right)^{-\frac{n+1}{r}}\Gamma\left(\frac{n+1}{r}\right).\end{aligned}$$

La dernière intégrale se calcule avec la définition de Γ ; pour que cette chose tende vers 0, il faut que $\cos\theta$ soit strictement positif pour être sûr que $|\nu|\cos\theta-b>0$ et donc que $|\arg\nu|<\frac{\pi}{2}$. A ce moment le terme en exposant $-1/r$ suffit pour envoyer tout le monde en 0 lorsque $|\nu|\to\infty$.

4-b : ***Représentation asymptotique de Gamma***

Repartons pour l'instant avec la définition : $\Gamma(z+1)=\int_0^\infty e^{-t}t^z dt=\int_0^\infty e^{-(t-z\ln t)}dt$ et posons (avec la détermination principale de ln) : $\varphi(t)=(t-z\ln t)-(z-z\ln z)$; on a $\varphi'(t)=1-\frac{z}{t}$ et $\varphi''(t)=\frac{z}{t^2}$, soit $\varphi(z)=\varphi'(z)=0$ et $\varphi''(z)=\frac{1}{z}$, d'où en utilisant Taylor en z : $\varphi(t)=\frac{1}{2z}(t-z)^2+\ldots$; oublions les termes suivants et remplaçons dans l'intégrale de départ :

$$\Gamma(z+1)=\int_0^\infty e^{-\varphi(t)-(z-z\ln z)}dt\sim e^{-(z-z\ln z)}\int_0^\infty e^{-\frac{1}{2z}(t-z)^2}dt\sim e^{-(z-z\ln z)}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{1}{2z}(t-z)^2}dt.$$

En effet pour z grand l'intégrale sur $]-\infty\,;0]$ est négligeable et on peut la rajouter sans risque. On utilise alors l'intégrale de Gauss, ce qui donne $\Gamma(z+1)\sim e^{-(z-\ln z)}\sqrt{2\pi z}=\sqrt{2\pi z}\left(\frac{z}{e}\right)^z\Rightarrow\Gamma(z)\sim\sqrt{\frac{2\pi}{z}}\left(\frac{z}{e}\right)^z$ puisque $\Gamma(z+1)=z\Gamma(z)$.

Pour valider cette approche il nous faut montrer que les termes négligés sont bien négligeables… Reprenons la fonction $\varphi(t)=(t-z\ln t)-(z-z\ln z)$ et posons $t=z(u+1)$ alors

$$\varphi(t)=zu+z-z\ln z-z\ln(u+1)-z+z\ln z\Leftrightarrow\frac{\varphi(t)}{z}=u-\ln(u+1)=u-u+\frac{1}{2}u^2-\frac{1}{3}u^3+\ldots$$

Posons $\varphi(t)=w$, on a alors $\frac{w}{z}=\frac{1}{2}u^2-\frac{1}{3}u^3+\frac{1}{4}u^4-...=u^2\left(1-\frac{1}{3}u+\frac{1}{4}u^2-...\right)$; considérons alors u comme une fonction de w : à cause du terme u^2, si nous essayons d'exprimer u en fonction de w sous forme de série nous aurons deux possibilités

$$\begin{cases} u_1=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k a_k\left(\frac{w}{z}\right)^{\frac{k}{2}} \\ u_2=\sum_{k=1}^{\infty}a_k\left(\frac{w}{z}\right)^{\frac{k}{2}} \end{cases}, a_1=\sqrt{2}, a_2=\frac{2}{3}, a_3=\frac{\sqrt{2}}{18},...$$

On a donc $t_1=z(1+u_1)$ et $t_2=z(1+u_2)$; reprenons alors $\Gamma(z+1)=\int_0^{\infty}e^{-\varphi(t)-(z-z\ln z)}dt$:

$$\Gamma(z+1)=\left(\frac{z}{e}\right)^z\int_0^{\infty}e^{-\varphi(t)}dt \Leftrightarrow \frac{\Gamma(z+1)}{(z/e)^z}=\int_0^z e^{-w}dt+\int_z^{\infty}e^{-w}dt=-\int_0^{\infty}e^{-w}\frac{dt_1}{dw}dw+\int_0^{\infty}e^{-w}\frac{dt_2}{dw}dw .$$

On termine en remplaçant $\frac{dt_1}{dw}$ et $\frac{dt_2}{dw}$ par leur expression sous forme de série, ce qui donne $\frac{\Gamma(z+1)}{(z/e)^z}=\int_0^{\infty}e^{-w}\left(\frac{dt_2}{dw}-\frac{dt_1}{dw}\right)dw$; on utilise enfin le lemme de Watson et après moult calculs on obtient

$$\frac{\Gamma(z+1)}{(z/e)^z}\sim\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2k+1)a_{2k+1}}{z^{k+1/2}}\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\frac{2\pi}{z}}\left(1+\frac{1}{12z}+...\right),$$

soit la formule de Stirling étendue aux complexes.

Il y a d'autres moyens d'obtenir ce résultat, particulièrement en utilisant la formule d'Euler - MacLaurin : voir S. D. Chatterji, *Analyse Complexe*, p 370.

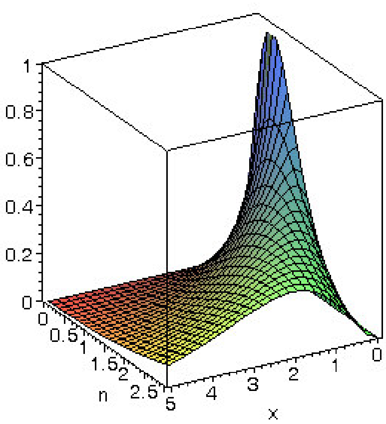
5. Gamma et les probabilités

5-a : ***Loi*** γ

On dira qu'une v.a. X suit une loi γ de paramètre ν si sa densité de probabilité est donnée par : $f(x)=\frac{1}{\Gamma(\nu)}e^{-x}x^{\nu-1}$ si $\begin{cases} x>0 \\ \nu\geq 0 \end{cases}$ et $f(x)=0$ si $x\leq 0$.

Par définition même de cette loi on a $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=\int_0^{+\infty}f(x)dx=1$.

Traçons quelques lois γ de paramètres différents :



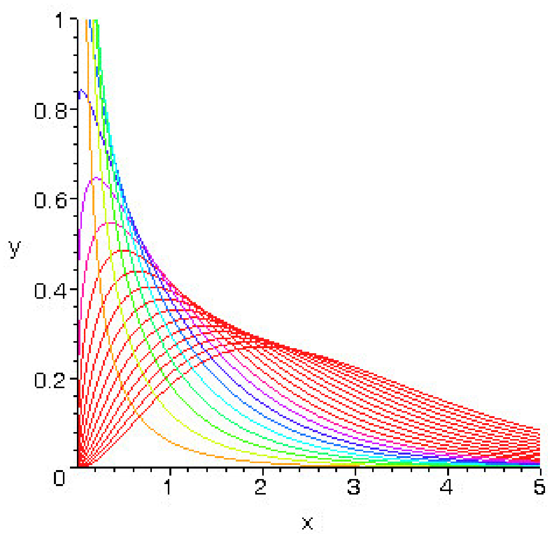


fig. 8 : Lois gamma de paramètre *n*

5-b : ***Fonction caractéristique***

On fait donc la T.F. de γ : $\varphi_{\gamma_\nu}(t)=\frac{1}{\Gamma(\nu)}\int_0^{+\infty}e^{-x}x^{\nu-1}e^{itx}dx=\frac{1}{\Gamma(\nu)}\int_0^{+\infty}e^{(-1+it)x}x^{\nu-1}dx$; on trouve alors $\varphi_{\gamma_\nu}(t)=\frac{1}{(1-it)^\nu}$ en utilisant la transformation de Laplace.

5-c : ***Stabilité additive***

On prend deux v.a. X et Y suivant des lois γ de paramètres ν et η ; leurs fonctions caractéristiques sont donc $\varphi_X(t)=\frac{1}{(1-it)^\nu}$ et $\varphi_Y(t)=\frac{1}{(1-it)^\eta}$ d'où

$$\varphi_{X+Y}(t)=\varphi_X(t)\varphi_Y(t)=\frac{1}{(1-it)^\nu}\frac{1}{(1-it)^\eta}=\frac{1}{(1-it)^{\nu+\eta}}.$$

La somme de ces deux v.a. suit donc une loi de paramètre .

On peut généraliser à la loi $\gamma_\nu(a,b)=a+b\gamma_\nu$ avec $b>0$; cette loi est également stable, de densité $f(x)=\frac{1}{b\Gamma(\nu)}e^{-\frac{x-a}{b}}\left(\frac{x-a}{b}\right)^{\nu-1}$.

5-d : ***Moments***

$\overline{X^n}=\frac{1}{\Gamma(\nu)}\int_0^{+\infty}e^{-x}x^{\nu-1}x^n dx=\frac{1}{\Gamma(\nu)}\int_0^{+\infty}e^{-x}x^{\nu+n-1}dx=\frac{\Gamma(\nu+n)}{\Gamma(\nu)}$; particulièrement pour $n=1$ on a la moyenne $\frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\nu)}=\nu$ et pour $n=2$ la variance $\frac{\Gamma(\nu+2)}{\Gamma(\nu)}=\frac{\Gamma(\nu+2)}{\Gamma(\nu+1)}\frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\nu)}=(\nu+1)\nu$, soit

$$\operatorname{var}X=\overline{X^2}-\overline{X}^2=(\nu+1)\nu-\nu^2=\nu.$$

5-e : ***Génération à partir d'un processus de Poisson***

On dit qu'une suite (A_n) d'événements A se réalisant aux dates aléatoires (t_n) obéit à un *processus de Poisson* si les variables ($t_i - t_{i-1}$) correspondant aux durées entre deux événements successifs sont indépendantes, suivent la même loi de probabilité et si la réalisation de l'un quelconque des A_i (et d'un seul) pendant un intervalle de temps très petit $[t\,;t+\Delta t]$ vaut $\lambda\Delta t$ quelque soit t. Le coefficient de proportionnalité λ est le paramètre du processus.

Par exemple l'événement A est l'arrivée d'un avion sur un aérodrome, la suite des (A_n) est alors la suite des arrivées des avions pendant un temps donné.

La loi du nombre d'événements A se produisant pendant l'intervalle de temps $[t\,;t+\Delta t]$ est donc une loi binomiale $B(1,\lambda\Delta t)$ (A se produit une seule fois dans cet intervalle de temps). Prenons maintenant un intervalle de temps t_2-t_1 que nous découpons en n petits intervalles de longueur Δt : $n=\frac{t_2-t_1}{\Delta t}$; appelons X la v.a. égale au nombre de fois où A se produit entre t_1 et t_2 ; X est alors la somme de n v.a. suivant une loi binomiale et suit donc la loi $B(n,\lambda\Delta t)=B(\frac{t_2-t_1}{\Delta t},\lambda\Delta t)$ (la loi binomiale est stable pour l'addition).

Lorsque Δt tend vers 0 la loi binomiale tend vers la loi de Poisson de paramètre $\lambda\Delta t\frac{t_2-t_1}{\Delta t}=\lambda(t_2-t_1)=\lambda T$ d'où $P(X=k)=\frac{e^{-\lambda T}(\lambda T)^k}{k!}$.

Revenons à la loi γ : la probabilité que l'un quelconque des événements A se réalise dans $[t\,;t+\Delta t]$ est $\lambda\Delta t$; quelle est alors la loi de probabilité de la date T de réalisation du prochain événement A ? Appelons F

la fonction de répartition de T et f la densité de probabilité de T ; supposons également que A s'est réalisé à l'instant 0, la nouvelle occurrence de A se produira entre t et $t+\Delta t$: on a alors

$$f(t)\Delta t = [1-F(t)]\lambda\Delta t .$$

Expliquons : $F(t)$ est l'événement « A se produit avant t » et $1 - F(t)$ est l'événement « A ne se produit pas avant t » ; on a dit précédemment que A se produisait avec la probabilité $\lambda\Delta t$ dans $[t\,;t+\Delta t]$ d'où la relation. Il faut évidemment que les A se produisent indépendamment les uns des autres pour pouvoir mettre le premier A à l'instant 0.

En passant à la limite on a $f(t)dt = [1-F(t)]\lambda dt$, or $\dfrac{d[1-F(t)]}{dt} = -F'(t) = -f(t)$ d'où en remplaçant f : $\dfrac{(1-F(t))'}{1-F(t)} = -\lambda$, soit en intégrant $1-F(t) = e^{-\lambda t+C} = e^{-\lambda t}$ car C est nulle puisque $F(0) = 0$. On dérive alors F ce qui donne $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$; T suit donc une loi exponentielle ou plutôt une loi gamma $\gamma_1(0,\dfrac{1}{\lambda})$ puisque $f(t) = \dfrac{1}{(1/\lambda)\Gamma(1)} e^{-\frac{t}{1/\lambda}} t^{1-1}$.

La moyenne de T est $1/\lambda$, de même que son écart-type.

Si on cherche la loi de probabilité de T_n, de réalisation du $n^{\text{ième}}$ évènement A, c'est la somme de n variables T de loi $\gamma_1(0,\dfrac{1}{\lambda})$, T_n a donc pour loi $\gamma_n(0,\dfrac{1}{\lambda})$ de densité $f(t) = \dfrac{\lambda}{\Gamma(n)} e^{-\lambda t} t^{n-1}$.

*5-f : **Loi du carré d'une variable normale réduite***

Soit X une v.a. suivant une loi normale $\mathscr{N}(0,1)$ et $Y = X^2$ dont nous cherchons la densité de probabilité g. Il est immédiat que les événements $\{0 < Y < y\}$ et $\{-x < X < x\}$ ont la même probabilité, ce qui nous permet d'écrire : $p\{0 < Y < y\} = p\{-x < X < x\}$ d'où en appelant G la fonction de répartition de Y et F celle de X :

$$G(y) = F(x) - F(-x) = 2F(x) - 1, \text{ soit } g(y)dy = 2f(x)dx .$$

On a alors $g(y) = 2f(x)\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \dfrac{d(\sqrt{y})}{dy} = \dfrac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y}{2}} \dfrac{1}{2\sqrt{y}} = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y}{2}} y^{-\frac{1}{2}}$, soit la loi $\gamma_{\frac{1}{2}}(0,2)$ (rappelons que $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$).

Du fait de la symétrie de la loi normale la médiane et la moyenne sont nulles ; ceci entraine que tous les moments sont centrés et que les moments d'ordre impair sont nuls. Pour les moments d'ordre pair on calcule :

$$\overline{Y^p} = \overline{X^{2p}} = \overline{X^2}^{\,p} = \left(\overline{\gamma_{\frac{1}{2}}(0,2)}\right)^p = \left(\overline{2\gamma_{\frac{1}{2}}}\right)^p = 2^p \frac{\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} = 2^p \left(p-\frac{1}{2}\right) \frac{\Gamma\left(p-\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)},$$

soit

$$2^p \frac{\left(p-\frac{1}{2}\right)\left(p-\frac{3}{2}\right)\ldots\frac{3}{2}\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} = 1.3.5\ldots(2p-1) .$$

En particulier la variance vaut 1 de même que l'écart-type ; le moment d'ordre 3 vaut 3.

5-g : ***Somme de carrés de variables normales réduites indépendantes***

Soit (X_i), $i = 1 \dots p$ une suite de v.a. normales centrées réduites indépendantes ; la v.a. $\chi^2(p) = \sum_{i=1}^{p} X_i^2$ est la loi du *Khi-deux* ; chaque X_i^2 suit la loi $\gamma_{\frac{1}{2}}(0, 2)$ d'où $\chi^2(p)$ suit la loi $\sum_{i=1}^{p} \gamma_{\frac{1}{2}}(0, 2) = \sum_{i=1}^{p} 2\gamma_{\frac{1}{2}} = 2\gamma_{\frac{p}{2}}$; la densité de probabilité de $\chi^2(p)$ est donc

$$g(x) = \frac{1}{2^{p/2}\Gamma(p/2)} e^{-\frac{x}{2}} y^{\left(\frac{p}{2}-1\right)}.$$

Le Khi-deux est stable par addition comme toute loi γ ; ses moments s'obtiennent comme précédemment :

$$\overline{\chi^2(p)} = p\ ,\ \overline{\left[\chi^2(p)\right]^2} = 4\frac{p}{2}\left(\frac{p}{2}+1\right) = p^2 + 2p \Rightarrow \mathrm{var}\,\chi^2(p) = p^2 + 2p - p^2 = 2p\ .$$

6. Bibliographie

Sur l'analyse complexe (on trouve en général quelques pages sur Gamma) :

E. Hairer, G Wanner, *L'analyse au fil de l'histoire*, Springer, 2001

Indispensable pour les idées de base.

N. Boccara, Fonctions analytique, Ellipses, 1996

Un petit livre pas très épais mais très clair et facile à lire. Recommandé pour débuter.

A. Angot, *Compléments de Mathématiques*, Masson et Cie, 1970

Très clair et succinct, amplement suffisant jusqu'en Spé. On le trouve parfois d'occasion.

H. Hochstadt, *Les fonctions de la physique mathématique*, Masson et Cie, 1973

Epuisé, mais très intéressant ; les calculs sont parfois rudes mais méritent de s'y attarder.

W. Appel, *Mathématiques pour la physique et les physiciens*, H&K éd., 2002

Passe un peu vite sur pas mal de trucs, mais reste compréhensible.

R. Godement, *Analyse Mathématique, vol II*, Springer, 2003

Court mais efficace sur la question de Gamma (si vous allez au-delà de bac + 2 indispensable).

W. Rudin, *Analyse réelle et complexe*, Dunod, 1998

Traitement moderne de l'analyse complexe, niveau bac+4. Commentaires historiques par Jean Dhombres.

H. M. Edwards, *Riemann's Zeta Function*, Dover Pub., 1974 (2001)

Si vous le trouvez ouvrez votre portefeuille, c'est la référence.

M. Zissman, *Mathématiques pour l'agrégation*, Dunod, 1996

Beaucoup de choses qui partent dans beaucoup de directions. Gamma est traitée sous forme d'exos.

S. D. Chatterji, Cours d'Analyse, vol II, Presses Polytechniques et Univ. romandes, 1997

Une référence écrite dans un style très clair et accessible ; nombreuses notes historiques.

H. Cartan, Théorie élémentaire des fonctions analytiques, Hermann, 1961 (1992)

Agréable à lire ; seule la question du prolongement analytique est traitée de manière un peu délicate.

G. Demengel, Transformations de Laplace, Ellipses, 2002

Malgré une présentation un peu fouillis on y trouve l'essentiel à connaître sur ce genre de questions.

Encyclopédie Universalis, article *Fonction Gamma*, ed. électronique, 2004

Sur Internet, pas grand-chose de passionnant…

Etude de générateurs aléatoires :

http://193.48.37.48/~douillet/preprint/simul/simul.html

Pour une tripotée de formules et de liens on consultera évidemment :

http://mathworld.wolfram.com/GammaFunction.html