Fibonacci et ses lapins…

Léonardo Fibonacci, un des premiers mathématiciens italiens à utiliser les chiffres arabes, définit ce que l'on appelle maintenant la suite de Fibonacci de la manière suivante :

Il acquiert un couple de jeunes lapins qui commencent à se reproduire au bout du deuxième mois ; ils donnent naissance à un couple de lapins qui ne pourront se reproduire qu'au bout de deux mois, et ainsi de suite, chaque couple donnant naissance à un nouveau couple tous les mois, lesquels commencent à se reproduire au bout de deux mois. On obtient ainsi la suite récurrente (u_n) définie par :

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \ ;$$

il y a une infinité de suites possibles suivant les valeurs initiales, ici on prend donc $u_0 = 1$; $u_1 = 1$.

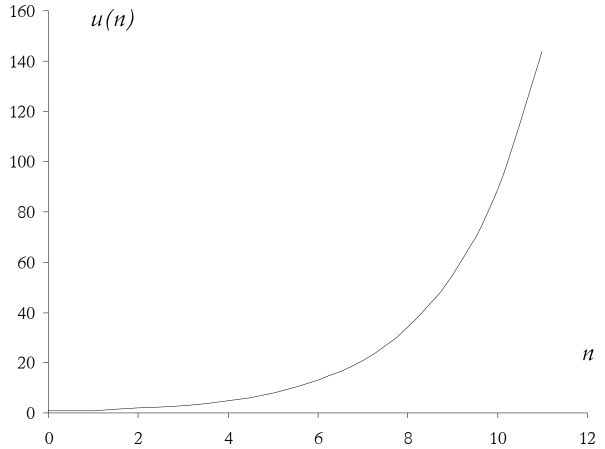

fig. 1 : Suite de Fibonacci

Les premiers nombres de la suite sont alors 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34… On voit assez facilement que la différence de deux termes ne donne rien de particulier : 0, 1, 2, 3, 5, 8… si ce n'est les termes de la suite (vous pouvez esssayer en changeant les premiers termes de la suite, par exemple comme E. Lucas en prenant 1 et 3).

Ci-dessous la représentation en binaire (lorsqu'il y a 1 on met un point noir, lorsqu'il y a 0 on laisse en blanc) des 255 premiers nombres de Fibonacci et des 255 premiers nombres de Lucas que nous appelerons F_n (les F_n sont numérotés à partir de 1 : $F_1 = 1, F_2 = 1, \ldots$) et L_n . Les plus petits sont en bas, les plus grands en haut.

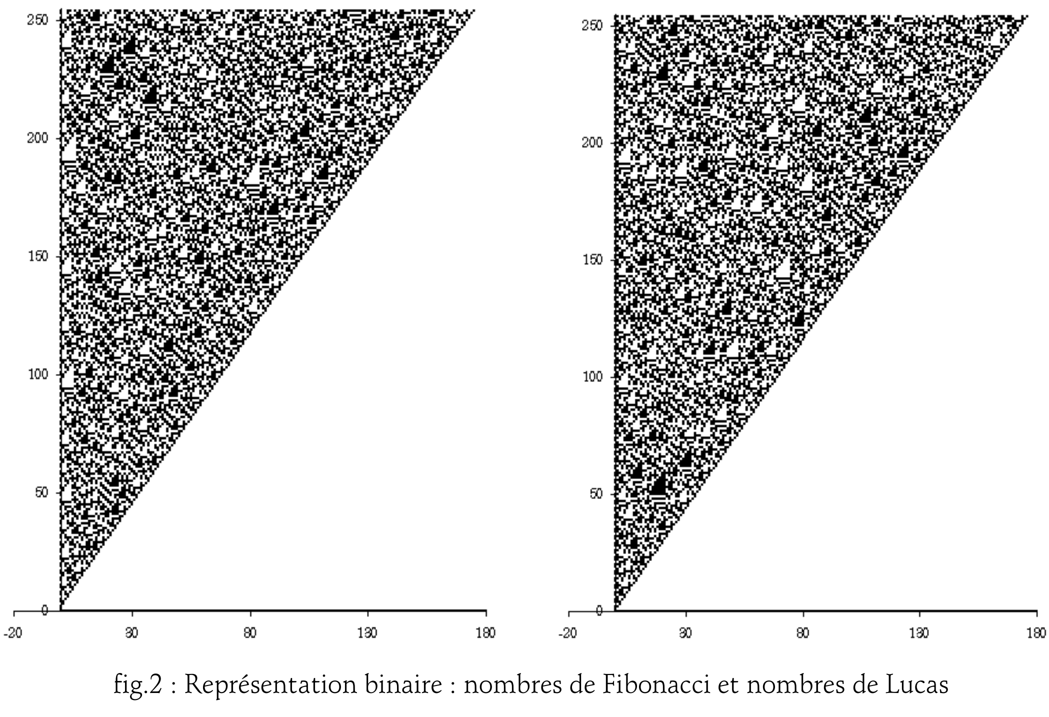

fig.2 : Représentation binaire : nombres de Fibonacci et nombres de Lucas

Curieusement certains motifs apparaissent… (pas trouvé d'explication convaincante).

Essayons donc d'étudier cette suite en s'intéressant au quotient de deux nombres consécutifs (on reprend une partie du livre mais en traitant le problème de manière différente) :

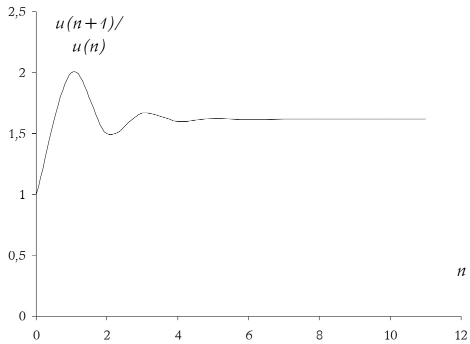

fig. 3 : Suite de Fibonacci (2)

Visiblement les termes de la suite suivent une progression exponentielle et les termes $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ convergent.

1. Convergence de $v_n = \frac{u_{n+1}}{u_n}$

$v_0 = 1$, si on trace par la méthode habituelle du point fixe on obtient la représentation suivante :

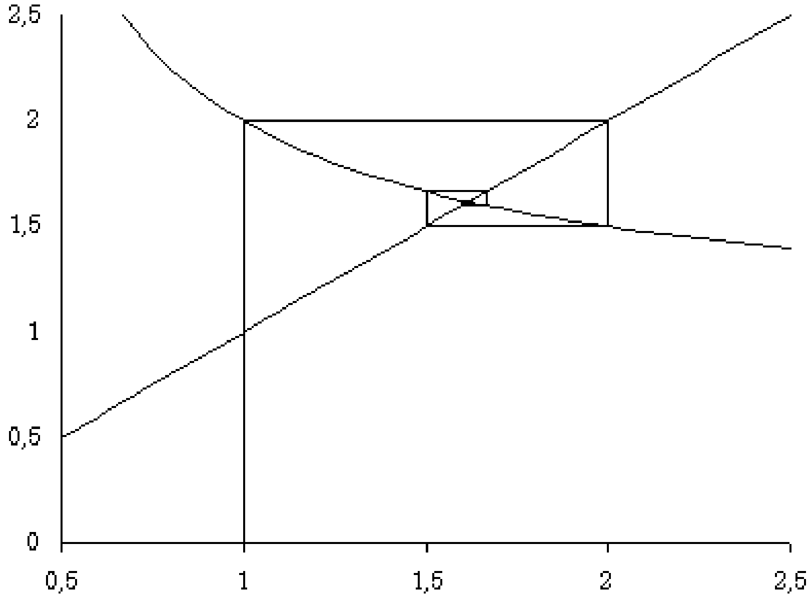

fig. 4 : Point fixe

Interprétons le graphique : v_n n'est pas monotone, par contre elle est bornée et semble converger vers le point fixe positif, intersection de $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$ et de la droite ($y = x$).

Deux possibilités se présentent : travailler sur les sous-suites d'ordre pair et impair, ce qui amènera à considérer $\begin{cases} x_{n+1} = f(f(x_n)) \\ x_0 = 1 \end{cases}$ (croissante majorée donc convergente) et $\begin{cases} y_{n+1} = f(f(y_n)) \\ y_0 = 2 \end{cases}$ (décroissante minorée donc convergente également), les deux suites convergeant vers le point fixe (à montrer également).

Dans tous les cas les points fixes sont les solutions de $f(x)=x$, soit celles de

$$x=1+\frac{1}{x}\Leftrightarrow x^2-x-1=0\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}=\varphi\\ x_2=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}=\varphi'\end{cases}.$$

On a bien sûr reconnu le nombre d'or dans φ ; grâce au fait que φ et φ' sont racines de l'équation, on a facilement : $\varphi\varphi'=-1, \varphi+\varphi'=1, \varphi^2=\varphi+1$, etc. ces relations nous resserviront.

Notez également que $f(f(x))=1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}}=\dfrac{2x+1}{x+1}=2-\dfrac{1}{x+1}$ (qui est donc du même type que *f* mais croissante).

La deuxième possibilité est de travailler directement sur v_n en regardant la manière dont sa distance au point fixe diminue.

On a $\left|v_{n+1}-\varphi\right|=\left|1+\dfrac{1}{v_n}-1-\dfrac{1}{\varphi}\right|=\dfrac{\left|v_n-\varphi\right|}{v_n\varphi}=\dfrac{1}{v_n\varphi}\left|v_n-\varphi\right|$. Il est immédiat que $v_n>1$ puisque $v_n>0$; on a donc qui est le coefficient réducteur que nous utiliserons. On a donc $\left|v_n-\varphi\right|<\dfrac{1}{\varphi}\left|v_{n-1}-\varphi\right|<\dfrac{1}{\varphi^2}\left|v_{n-2}-\varphi\right|<\ldots<\dfrac{1}{\varphi^n}\left|v_0-\varphi\right|$; comme $\dfrac{1}{\varphi}<1$, la suite géométrique $\dfrac{1}{\varphi^n}$ tend vers 0 et v_n converge vers φ.

En fait quand on calcule les termes de v_n on est confronté aux quotients successifs des nombres de Fibonacci qui sont donc des fractions (irréductibles, voir au ch. Arithmétique, Fractions continues) qui approchent de mieux en mieux le nombre d'or.

2. Expression de v_n

Une autre approche consiste à calculer précisément les termes de la suite v_n en utilisant une propriété remarquable des suites homographiques $u_{n+1}=\dfrac{au_n+b}{cu_n+d}$: si cette suite a deux points fixes α et β (éventuellement complexes d'ailleurs), alors la suite $v_n=\dfrac{u_n-\alpha}{u_n-\beta}$ est géométrique ; on en déduit donc une expression de v_n puis de u_n.

Appliquons à v_n : les points fixes sont φ et φ' d'où (en remarquant que $\varphi=1+\dfrac{1}{\varphi}$)

$$z_n=\frac{v_n-\varphi}{v_n-\varphi'}\Rightarrow z_{n+1}=\frac{1+\dfrac{1}{v_n}-\varphi}{1+\dfrac{1}{v_n}-\varphi'}=\frac{1+\dfrac{1}{v_n}-1-\dfrac{1}{\varphi}}{1+\dfrac{1}{v_n}-1-\dfrac{1}{\varphi'}}=\frac{\varphi-v_n}{\varphi v_n}\frac{\varphi' v_n}{\varphi'-v_n}=\frac{\varphi'}{\varphi}z_n.$$

La suite est géométrique de raison $q=\dfrac{\varphi'}{\varphi}$, de premier terme $z_0=\dfrac{1-\varphi}{1-\varphi'}=\dfrac{\varphi'}{\varphi}=q$ d'où $z_n=q^{n+1}$. On en déduit donc $\dfrac{v_n-\varphi}{v_n-\varphi'}=z_n\Leftrightarrow v_n-\varphi=z_nv_n-z_n\varphi'\Leftrightarrow v_n\left(1-z_n\right)=\varphi-z_n\varphi'\Leftrightarrow v_n=\dfrac{\varphi-q^{n+1}\varphi'}{1-q^{n+1}}=\dfrac{\varphi^{n+2}-\varphi'^{n+2}}{\varphi^{n+1}-\varphi'^{n+1}}$.

3. Expression de u_n

Cette relation va nous donner les valeurs des nombres de Fibonacci : puisque $v_n=\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$, on a immédiatement

$$\frac{u_{n+1}}{\varphi^{n+2}-\varphi'^{n+2}}=\frac{u_n}{\varphi^{n+1}-\varphi'^{n+1}},$$

relation de récurrence entre les u_n. Il suffit de descendre cette relation jusqu'à u_0 :

$$\frac{u_n}{\varphi^{n+1}-\varphi'^{n+1}}=\frac{u_{n-1}}{\varphi^n-\varphi'^n}=\ldots=\frac{u_0}{\varphi-\varphi'}.$$

Finalement nous avons :

$$u_n=u_0\frac{\varphi^{n+1}-\varphi'^{n+1}}{\varphi-\varphi'}=\frac{1}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}-\frac{1-\sqrt{5}}{2}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right]=\frac{\sqrt{5}}{5}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right].$$

On vérifie quand même : par ex. $u_1=1$ et

$$\frac{\sqrt{5}}{5}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{1+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{1+1}\right]=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+5+2\sqrt{5}}{4}-\frac{1+5-2\sqrt{5}}{4}\right)=\frac{4\sqrt{5}}{4\sqrt{5}}=1.$$

Vous pouvez remarquer que lorsqu'on développe $\left(\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}\right)^n$, les termes en $\sqrt{5}$ disparaissent systématiquement, ce qui permet heureusement de trouver des nombres entiers… On a donc finalement

$$F_n=\frac{\sqrt{5}}{5}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

puisqu'il y a une différence de numérotation.

Pour les L_n vous pouvez recommencer (pas tout heureusement…) et obtenir :

$$L_n=\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right].$$

4. Compléments

Aussi bien pour les F_n que les L_n le terme φ'^n tend vers 0, et $F_n\approx\frac{1}{\sqrt{5}}\varphi^n, L_n\approx\varphi^n$ (en fait c'est le premier entier juste inférieur à ces nombres) . Peut on trouver une autre expression de ces nombres ?

Développons avec le binôme de Newton les termes de

$$(1+\sqrt{5})^n=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}\sqrt{5}+\binom{n}{2}5+\ldots+\binom{n}{2k}5^k+\binom{n}{2k+1}5^k\sqrt{5}+\ldots,$$

soit en regroupant :

$$(1+\sqrt{5})^n=\left[\binom{n}{0}+\binom{n}{2}5+\ldots+\binom{n}{2k}5^k+\ldots\right]+\left[\binom{n}{1}+\binom{n}{3}5+\ldots+\binom{n}{2k+1}5^k+\ldots\right]\sqrt{5}.$$

D'un autre côté utilisons les propriétés de φ :

$$\varphi^2=\varphi+1\Rightarrow\varphi^3=\varphi^2+\varphi=2\varphi+1\Rightarrow\varphi^4=\varphi.\varphi^3=2\varphi^2+\varphi=3\varphi+2\text{, etc.}$$

On a donc évidemment $\varphi^n=F_n\varphi+F_{n-1}=F_n\frac{1+\sqrt{5}}{2}+F_{n-1}=\left(\frac{F_n+2F_{n-1}}{2}\right)+\frac{F_n}{2}\sqrt{5}$ d'où (avec n impair)

$$\begin{aligned}&\binom{n}{0}+\binom{n}{2}5+\ldots+\binom{n}{2k}5^k+\ldots=2^{n-1}(F_n+2F_{n-1})\\&\binom{n}{1}+\binom{n}{3}5+\ldots+\binom{n}{2k+1}5^k+\ldots=2^{n-1}F_n\end{aligned}.$$

On en déduit facilement la formule pour n pair.

Vous pouvez voir une tripotée de formules toutes plus belles les unes que les autres sur

http://mathworld.wolfram.com/FibonacciNumber.html

Un dernier mot : la fonction génératrice d'une suite u_n est la fonction f définie par $f(x)=\sum_n u_n x^n$; la fonction génératrice des F_n est donc $F(x)=\sum_n F_n x^n = x+x^2+2x^3+3x^4+\ldots+F_{n-1}x^{n-1}+F_n x^n+\ldots$

Peut-on trouver une expression plus agréable de F ¿ Nous pouvons toujours remplacer les F_n par leur expression :

$$F(x)=\sum_{n\geq 1}F_n x^n=\frac{1}{\sqrt{5}}\sum_{n\geq 1}\left(\varphi^n-\varphi'^n\right)x^n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(1+\sum_{n\geq 1}(\varphi x)^n\right)-\frac{1}{\sqrt{5}}\left(1+\sum_{n\geq 1}(\varphi' x)^n\right)=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\frac{1-\varphi^n x^{n+1}}{1-\varphi x}-\frac{1-\varphi'^n x^{n+1}}{1-\varphi' x}\right],$$

soit après avoir remarqué que $(1-\varphi x)(1-\varphi' x)=1-(\varphi+\varphi')x+\varphi\varphi' x^2=1-x-x^2$:

$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\frac{1-\varphi^n x^{n+1}}{1-\varphi x}-\frac{1-\varphi'^n x^{n+1}}{1-\varphi' x}\right]=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\frac{(1-\varphi^n x^{n+1})(1-\varphi' x)-(1-\varphi^n x^{n+1})(1-\varphi' x)}{1-x-x^2}\right].$$

La convergence de la série est assurée lorsque $|x+x^2|<1 \Leftrightarrow |x||x+1|<1$ et $|x\varphi|<1$, $|x\varphi'|<1$, soit $\varphi'<x<-\varphi'$ pour le cas réel. Si on se place dans le plan complexe les points z tels que $|z+z^2|<1$ sont à l'intérieur d'un ovale de Cassini.

On a alors en passant à la limite : $F(x)=\dfrac{x}{1-x-x^2}$.

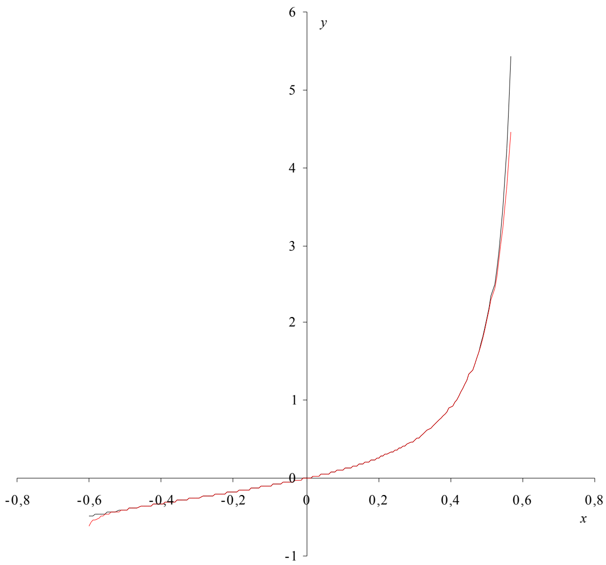

fig. 5 : Fonction génératrice de nombres de Fibonacci

Pour de nombreuses généralités dans ce domaine :

http://nte-serveur.univ-lyon1.fr/nte/immediato/recurrence/table.htm

Le nombre d'or se retrouve évidemment dans bien d'autres situations, dans un prochain épisode nous étudierons le dodécagone où son intervention est permanente.

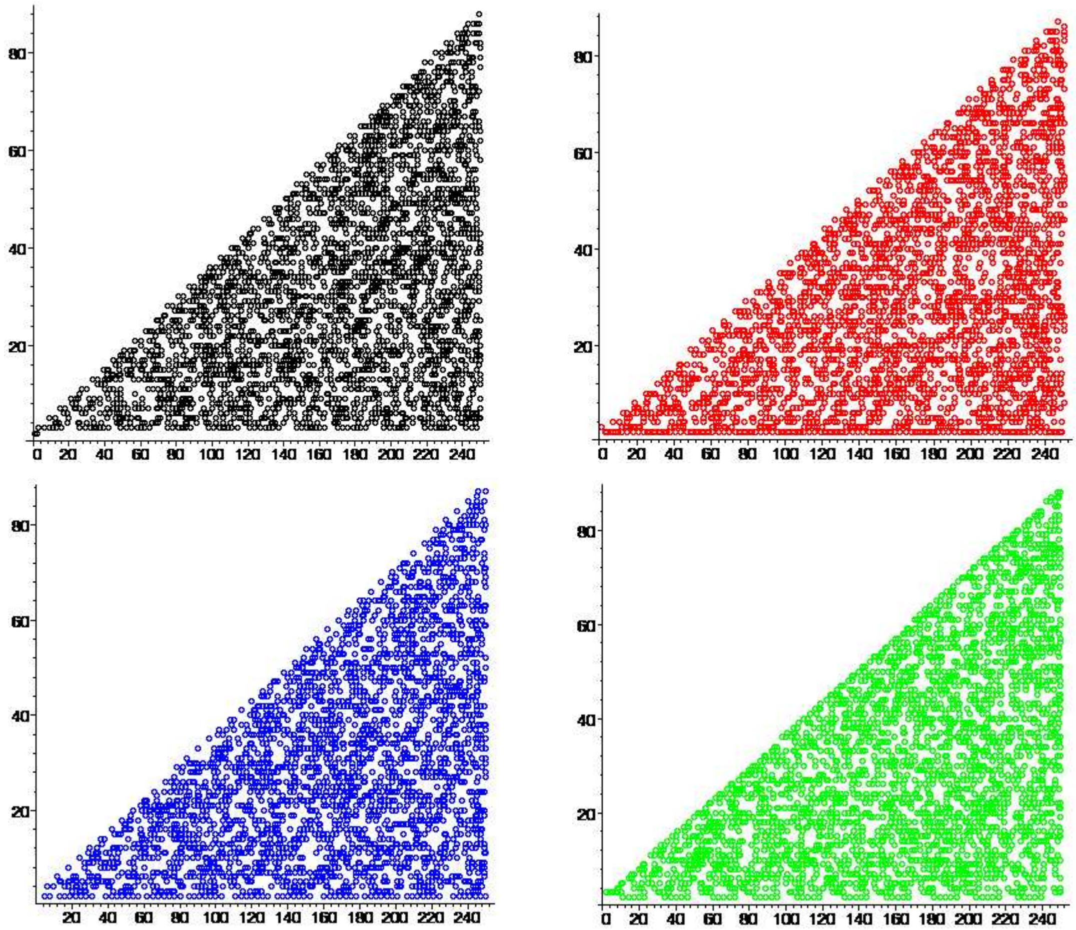

fig. 6 : La décomposition des nombres de Lucas en base 4…
(de gauche à droite et de haut en bas : 0, 1, 2, 3)