Etude théorique simplifiée de la Clepsydre

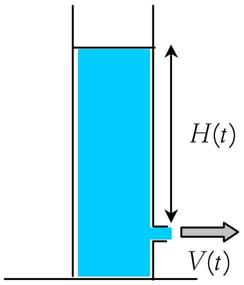
d'après F. Geniet, LPTA-UM2
http://www.lpta.univ-montp2.fr/users/geniet/

1. Clepsydre à bords droits

On note S la section de la clepsydre et s la section de l'ajutage.

Le paramètre décrivant l'écoulement est la hauteur de la colonne d'eau $H(t)$ dont on veut décrire l'évolution au cours du temps.

a. Relation de conservation de la masse (débit)



Le débit volumétrique d'eau est donné par (1) : $Q(t) = -S\frac{dH}{dt} = sV(t)$ où $V(t)$ est la vitesse (moyenne[1]) de sortie de l'eau.

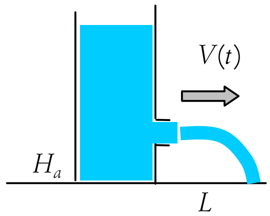
b. Conservation de l'énergie pour un fluide idéal non visqueux (relation de Bernoulli)

Toute l'énergie potentielle gagnée par la descente de l'eau est convertie en énergie cinétique, soit $\frac{1}{2}mV^2(t) = mgH(t)$ où m est la masse qui s'écoule entre les instants t et $t+dt$. On a donc

$$(2) \qquad V(t) = \sqrt{2gH(t)},$$

résultat peu intuitif : le flux sortant n'est donc pas proportionnel à la différence de pression mais à la racine de cette différence[2].

c. Vérification expérimentale de la loi (2)



L'écoulement libre de l'eau est quasiment une chute libre et décrit sensiblement une parabole d'équation $H_a = \frac{1}{2}g\frac{L^2}{V^2}$.

De (2) on tire $L(t)) = 2\sqrt{H_a H(t)}$ qui donne donc la portée du jet au cours du temps, résultat facile à tester.

d. Résolution de (1)

On reprend l'équation de départ :

$$-S\frac{dH(t)}{dt} = sV(t) = s\sqrt{2gH(t)} \Rightarrow \frac{dH(t)}{dt} = -\frac{s}{S}\sqrt{2gH(t)} \Rightarrow \frac{H'(t)}{2\sqrt{H(t)}} = -\frac{s\sqrt{2g}}{2S} \;;$$

on intègre : $\sqrt{H(t)} = -\frac{s\sqrt{2g}}{2S}t + K$; à $t=0$ on a $H(0) = H_0$ d'où $K = \sqrt{H_0}$ et finalement

$$H(t) = H_0\left(1 - \frac{s\sqrt{g}}{S\sqrt{2H_0}}t\right)^2.$$

[1] Il n'est pas évident que la vitesse instantanée soit uniforme…

[2] On se trouve en régime inertiel et pas dissipatif ; pour obtenir un régime dissipatif (écoulement type Poiseuille) il faut augmenter la viscosité et diminuer la section du tube de manière à diminuer le nombre de Reynolds de l'écoulement.

La durée totale de l'écoulement est alors donnée par

$$H\left(t_{fin}\right)=0 \Rightarrow H_0\left(1-\frac{s\sqrt{g}}{S\sqrt{2H_0}}t_{fin}\right)^2=0 \Rightarrow t_{fin}=\frac{S\sqrt{2H_0}}{s\sqrt{g}}.$$

On peut vérifier qu'il s'agit bien d'un temps… Egalement : plus s est petit, plus t_{fin} est grand, ce qui est assez normal !

2. Clepsydre à bords variables

Considérons maintenant une clepsydre de forme inconnue, soit avec une forme dépendant de H, de même que S : dans (1) on a alors $Q(t)=-S(H)\frac{dH}{dt}=sV(t)=s\sqrt{2gH}$.

L'objectif étant d'avoir un débit constant, il nous faut $\frac{dH}{dt}=-K$ d'où $S(H)=\frac{s}{K}\sqrt{2gH}$.

Si on suppose une symétrie de révolution au récipient, on a alors $S(H)=\pi R^2(H)$ d'où

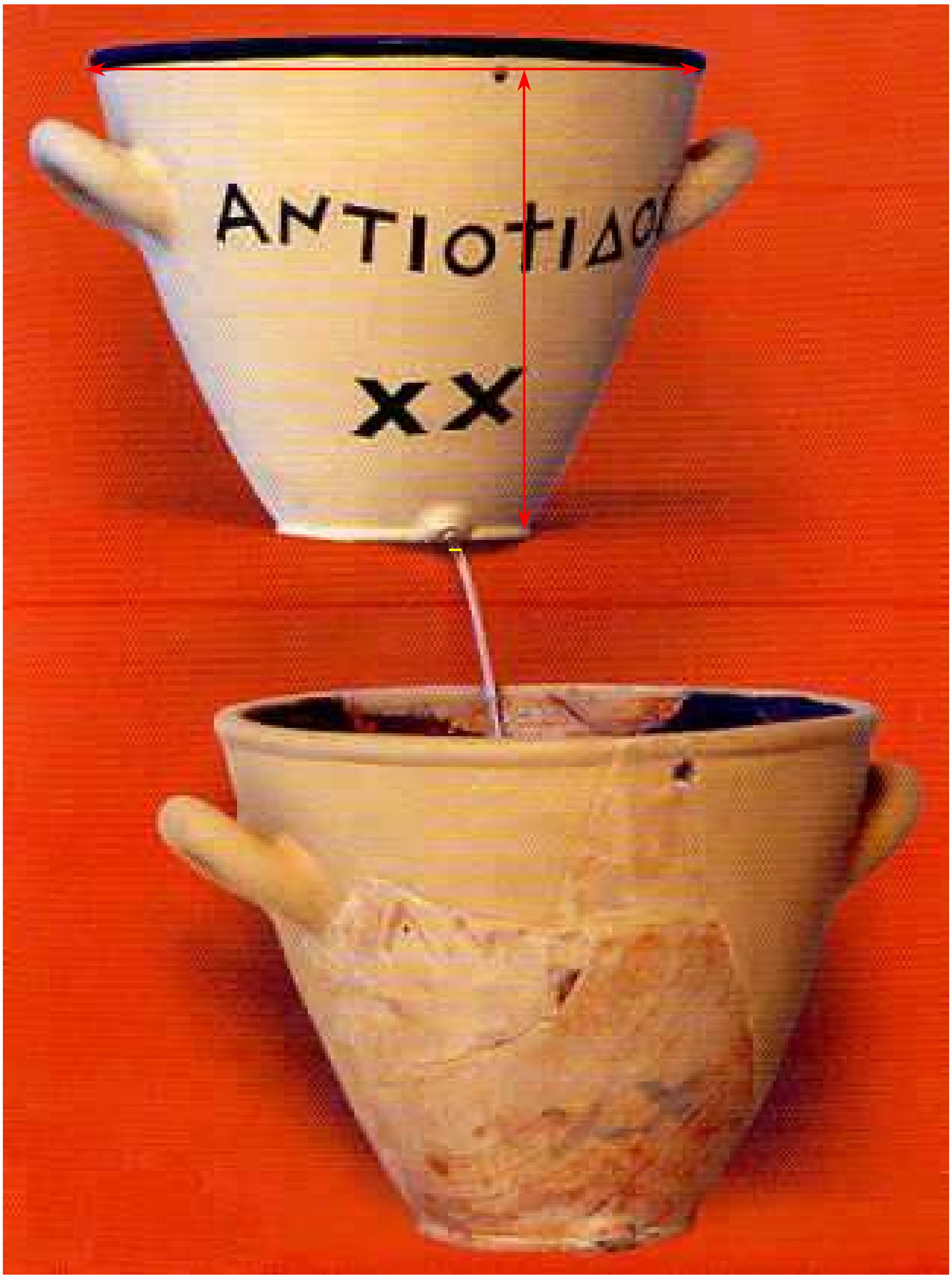
$$R^2(H)=\frac{s}{\pi K}\sqrt{2gH} \Leftrightarrow R^4(H)=\frac{2gs^2}{\pi^2K^2}H \Leftrightarrow R(H)=\left[\frac{2gs^2}{\pi^2K^2}H\right]^{\frac{1}{4}}.$$

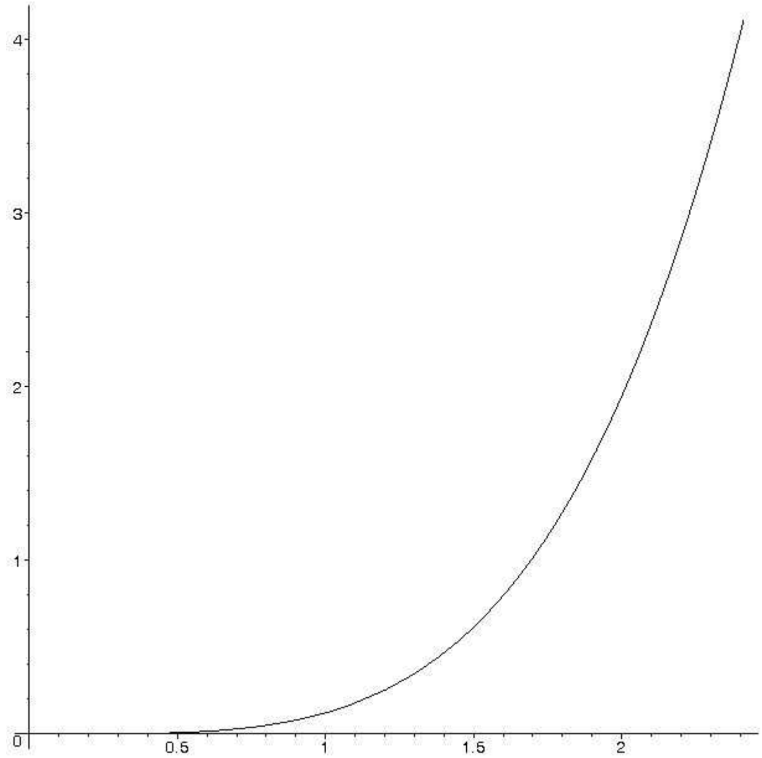
H_0=4,11 cm,

Largeur = 5,19 cm,

r = 0,18 cm.

Pour un débit de 0,05 on obtient la courbe suivante qui ne donne pas un résultat exceptionnel…




0
0.5
1
1.5
2
1
2
3
4


XX